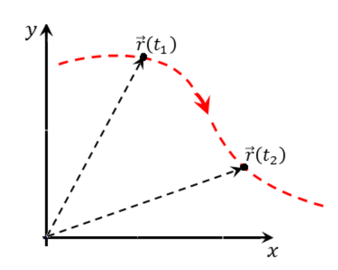
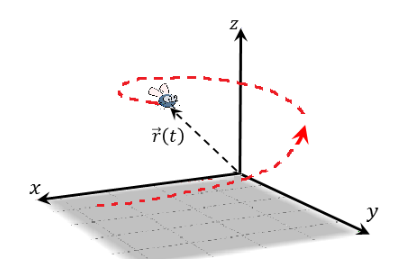


Funciones vectoriales de un parámetro

2.1 Curvas paramétricas y funciones vectoriales de un parámetro



Con frecuencia consideramos una curva en el plano como una línea trazada sobre un papel, tal como puede ser una línea recta, una curva parabólica o una circunferencia. Nos preguntamos ahora, ¿cómo podemos describir (analíticamente) una curva en el plano? Es evidente que debemos indicar de alguna manera los puntos por donde pasa, los puntos que forman la curva. En algunos casos, podemos usar para ello las coordenadas cartesianas de los puntos $P(x, y)$ de la curva, expresando a y como una función de x, por ejemplo $y = 1 + \cos^2(x)$, o a x como una función de y, por ejemplo $x = y^2$, o dar una relación entre x e y que defina implícitamente a una variable en términos de la otra, por ejemplo $x^2 + y^2 = 166$. Hay curvas que se representan más fácilmente mediante otro sistema de coordenadas (por ejemplo, $r = 2\cos\theta$ usando coordenadas polares). Algunas curvas se describen mejor cuando las coordenadas x e y están dadas en términos de una variable t llamada parámetro (como en el caso de las ecuaciones paramétricas de una recta en el plano vistas en la Sección 1.5.1 del Capítulo 1). Podemos, también, indicar cada punto de una curva haciendo uso de la asociación de P con el punto final del vector $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ ubicado en posición canónica. En este capítulo discutiremos la forma paramétrica de describir curvas, mediante una representación vectorial.



2.1.1 Curvas paramétricas

Imaginemos un objeto que se mueve en un plano y, a medida que transcurre el tiempo, describe un camino como el representado por la curva de la Figura 2.1.1.

Si bien notamos que esta curva no puede ser descripta por una ecuación de la forma $y = F(x)$ (¿por qué?), sabemos que las coordenadas x e y de la posición del objeto dependen del instante de tiempo t. Por lo tanto existirán funciones f y g de la variable (o *parámetro*) t, tales que $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Este par de ecuaciones, que muchas veces es una forma conveniente para describir una curva, se llama *ecuaciones paramétricas* de la curva en el plano:

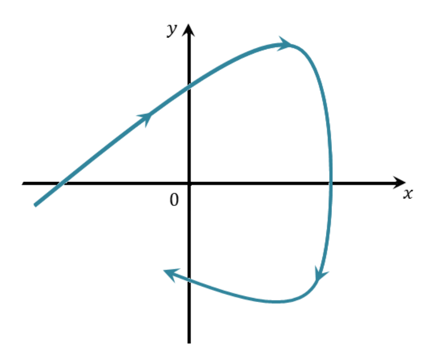


Figura 2.1.1: Curva en el plano

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t). \end{cases}$$

Cada valor de t determina un único punto (x, y) en el plano. Cuando t varía (en un intervalo de números reales), el punto $(x, y) = (f(t), g(t))$ se mueve generando una curva en el plano.



En el siguiente recurso se pueden graficar curvas paramétricas en el plano ingresando las expresiones para $f(t)$ y $g(t)$ que deseen.

https://ggbm.at/znWXYtud

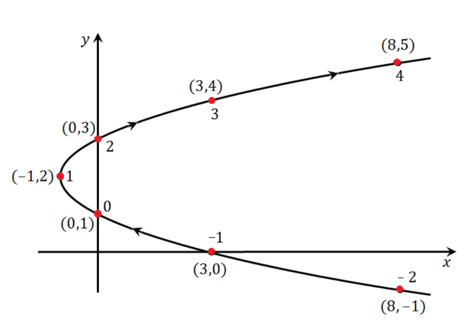
■ **Ejemplo 2.1.1** Las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x &= t^2 - 2t \\ y &= t + 1 \end{cases}$$

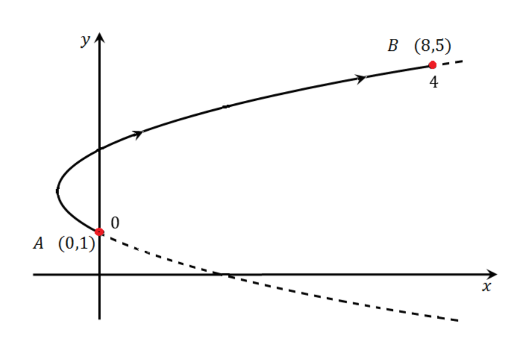
con t real, definen una curva plana. Describir y graficar la curva para los siguientes casos: a) si $t \in (-\infty, +\infty)$; b) si $t \in [0, 4]$.

En este ejemplo tenemos $f(t) = t^2 - 2t$, $g(t) = t + 1$.

a) A cada valor del parámetro $t \in \mathbb{R}$, le corresponde un punto de la curva. Por ejemplo, para $t = 0$ se tiene $x = f(0) = 0$ e $y = g(0) = 1$, o sea que el punto de la curva correspondiente a $t = 0$ es $(0, 1)$. Podemos así evaluar x e y para varios valores del parámetro, por ejemplo asignar a t los valores $-2, -1, 1, 2, 3, 4$, y luego situar los puntos $(x, y) = (f(t), g(t))$ en el plano. Si unimos estos puntos para producir una curva continua obtenemos la Figura 2.1.2 a), en la que las flechas indican el sentido en el que se van generando los puntos de la curva a medida que t aumenta su valor (se indica el valor de t que corresponde a cada punto marcado en la curva). 2.1.2



a) El parámetro t adopta cualquier valor real.



b) El parámetro t varía en $[0, 4]$.

Figura 2.1.2: Ecuaciones paramétricas: $x = f(t) = t^2 - 2t$, $\quad y = g(t) = t + 1$.

Observando la figura, parece que la curva trazada fuera una parábola. ¿Cómo podemos comprobarlo? Una forma es reescribir las ecuaciones paramétricas de la curva usando (sólo) coordenadas cartesianas, esto es, buscar una relación entre x e y, sin el parámetro t. Para ello debemos eliminar t en las ecuaciones dadas. En este ejemplo es posible hacerlo, por ejemplo despejando $t = y - 1$ de la segunda ecuación y luego sustituyendo en la primera ecuación. Esto da: $x = t^2 - 2t = (y - 1)^2 - 2(y - 1) = y^2 - 4y + 3$ y así vemos que la curva descripta por las ecuaciones paramétricas dadas es la parábola

$$x + 1 = (y - 2)^2,$$

de eje horizontal y vértice en $(-1, 2)$, con las ramas que abren hacia la derecha.

b) Si $t \in [0, 4]$, la curva paramétrica es ahora la parte de la parábola $x = y^2 - 4y + 3$ que empieza en el punto que corresponde al valor $t = 0$ del parámetro, o sea $A(0, 1)$, y termina en el punto que corresponde a $t = 4$, esto es en $B(8, 5)$, como se muestra en la Figura 2.1.2 b). La flecha señala el sentido de recorrido de la curva cuando el parámetro aumenta su valor desde $t = 0$ hasta $t = 4$.

■

Consideremos ahora un objeto que se mueve en el espacio, describiendo un camino imaginario representado por una curva en el espacio. Habrá entonces tres funciones del tiempo, f, g y h, que nos permitirán escribir las coordenadas de la posición del objeto en cada instante t mediante las

siguientes *ecuaciones paramétricas*:

$$\begin{cases} x &= f(t) \\ y &= g(t) \\ z &= h(t). \end{cases}$$

Observemos que para cada t, el punto $P\big(f(t), g(t), h(t)\big)$ da la *posición* del objeto en el tiempo t. Podemos definir el vector que va de O a P, para cada t (ver Figura 2.1.3). Esto sugiere que una curva paramétrica puede ser descripta mediante una función que a cada valor del parámetro t le asigna el vector $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP} = f(t)\,\breve{\imath} + g(t)\,\breve{\jmath} + h(t)\,\breve{k}$, esto es, mediante una *función con valores vectoriales*.

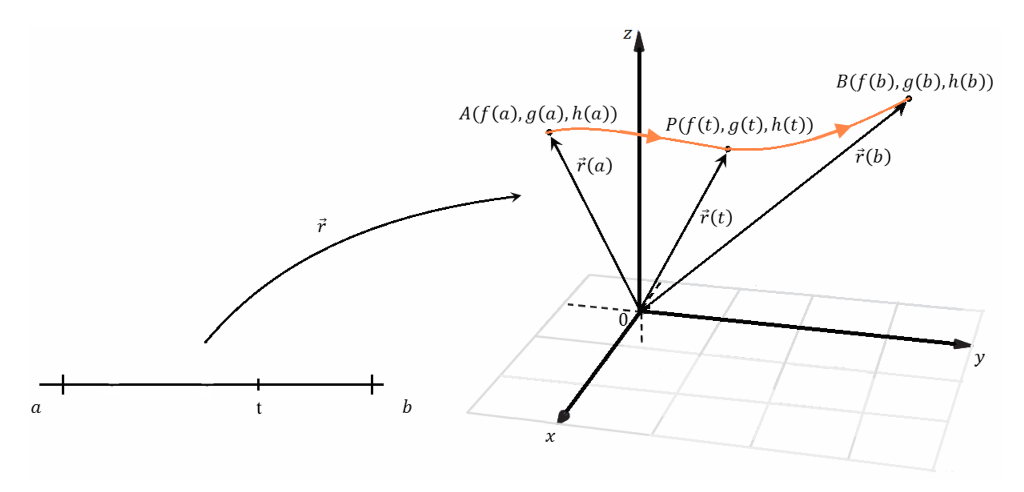


Figura 2.1.3: A medida que el parámetro t varía en $[a, b]$, el punto final del vector $\vec{r}(t)$ va generando una curva en el espacio.

La asociación entre punto y vector posición, en el caso de una curva en el plano, permite escribir $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP} = f(t)\breve{\imath} + g(t)\breve{\jmath}$.

Ejercicio En la Figura 2.1.2 a) dibuje los vectores $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}$ correspondientes a $t = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ y 4.



En el siguiente recurso pueden ver, en forma animada, cómo varía la ubicación del punto $P(f(t), g(t), h(t))$ con t:
https://ggbm.at/rfBDfd3d

Ahora bien, ¿qué es una *función con valores vectoriales*? Sabemos que una función en general es una regla que asigna a cada elemento del dominio un único elemento de su rango o imagen. El caso de una *función vectorial* es uno de los temas de estudio en Análisis Matemático II. Veremos que esta representación vectorial permite estudiar con facilidad el movimiento de un objeto en función del tiempo, caracterizando la variación temporal del desplazamiento, la velocidad y la aceleración.

Definición Una *función con valores vectoriales*, o simplemente *función vectorial*, es una función cuyo rango o imagen es un conjunto de vectores.

En este capítulo trabajaremos con funciones vectoriales, que denotamos $\vec{r}(t)$, cuyo dominio está en el conjunto de los números reales (intervalo I cerrado, abierto o semiabierto o todo $\mathbb{R}$) y cuyo rango o imagen está formado por vectores del espacio o del plano. Se tiene

$$\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \to V_n$$

donde $n = 3$ o 2.

Decimos que a cada número real t (*parámetro*) del dominio, la *función vectorial* $\vec{r}$ le asigna el vector $\vec{r}(t) = f(t)\,\breve{\imath} + g(t)\,\breve{\jmath} + h(t)\,\breve{k}$ en el espacio [ó $\vec{r}(t) = f(t)\,\breve{\imath} + g(t)\,\breve{\jmath}$ en el plano]. Para expresar una función vectorial usaremos también la notación

$$\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$$

en el espacio o

$$\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$

en el plano. Notar que, estrictamente, la función vectorial asigna a cada valor t el vector $\vec{r}(t)$ en posición canónica, esto es, el vector con su punto inicial en el origen de coordenadas.

Algunas características:

- Las componentes $f(t), g(t), h(t)$ $\big($ ó $x(t), y(t), z(t)$ $\big)$ del vector $\vec{r}(t)$, son funciones escalares de una variable real. Las llamamos *funciones componentes* de $\vec{r}(t)$.

- A medida que el parámetro t varía en su dominio, el punto extremo o final del vector $\vec{r}(t)$ (ubicado en posición canónica) va generando una curva C llamada *curva paramétrica*.

- El *sentido* de la curva paramétrica C está dado por el sentido en el que se van generando los puntos de la curva cuando el parámetro t aumenta su valor en el dominio $I \subset \mathbb{R}$.

- El dominio *paramétrico* I de variación del parámetro t, puede estar restringido a un intervalo finito $[a, b] \subset \mathbb{R}$. En este caso, la curva C tiene un *punto inicial* o *de partida* $A(f(a), g(a), h(a))$ (que es el punto extremo del vector $\vec{r}(t = a)$ en posición canónica) y un *punto final* o *de llegada* $B(f(b), g(b), h(b))$ (que es el punto extremo del vector $\vec{r}(t = b)$ en posición canónica). Ver Figura 2.1.3.

- El parámetro no siempre representa el tiempo y podríamos usar otra letra en lugar de t para indicarlo. Existe un parámetro especialmente "interesante" que representa, no ya el tiempo transcurrido, sino la longitud de la porción de curva recorrida desde su inicio; se suele denotar a este parámetro con la letra s, y se lo llama *longitud de arco*.
- Decimos que una curva C, parametrizada por la función vectorial $\vec{r}(t)$, con $a \leq t \leq b$, es cerrada si su punto final coincide con su punto inicial, esto es, si $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.

C Según vimos, una función vectorial de un parámetro representa una región del espacio o del plano que no es una región sólida ni una superficie, sino que podríamos decir que es un "objeto unidimensional": $\vec{r}(t)$ representa una *curva paramétrica* en el espacio o en el plano coordenado, dada en función de un parámetro. De manera similar veremos más adelante que es posible definir una función vectorial que depende de dos parámetros y que (podemos aventurar) representará un "objeto bidimensional", esto es, una *superficie paramétrica* en el espacio; su estudio queda postergado hasta el Capítulo 5, cuando necesitemos parametrizar superficies en el espacio.

■ **Ejemplo 2.1.2** *a*) El movimiento de cierto objeto en el plano está definido por la siguiente función vectorial:

$$\vec{r}_1(t) = 4\cos(t)\breve{\imath} + 4\,\mathrm{sen}(t)\breve{\jmath}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Graficar la *trayectora* que describe el objeto al moverse, indicando los puntos inicial y final así como el sentido del recorrido.

b) Si para otro objeto, el movimiento está representado por $\vec{r}_2(t) = -4\,\mathrm{sen}(2t)\breve{\imath} + 4\cos(2t)\breve{\jmath}$, con $0 \leq t \leq 2\pi$, ¿cuál es la curva determinada? Compare con el caso *a*).

Las funciones componentes son $x_1(t) = 4\cos t$ e $y_1(t) = 4\,\mathrm{sen}\,t$. Si para algunos

valores de t situamos en el plano los puntos $P\,(x_1(t), y_1(t))$, su ubicación parece indicarnos que la curva es una circunferencia $\left(\text{evalúe } \vec{r}_1(t) \text{ en } t = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right)$. Si eliminamos el parámetro t entre las ecuaciones $x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$, obtenemos la ecuación cartesiana de la curva. Para ello, en este caso conviene sumar las componentes al cuadrado para eliminar el parámetro, entonces queda:

$$x^2 + y^2 = [x_1(t)]^2 + [y_1(t)]^2 = (4\cos t)^2 + (4\,\mathrm{sen}\,t)^2 = 16\cos^2 t + 16\,\mathrm{sen}^2 t = 16$$

luego

$$x^2 + y^2 = 4^2.$$

Vemos así que el punto $P\,(x_1(t), y_1(t))$, está en la circunferencia de radio 4 centrada en el origen. Notar que en este ejemplo el parámetro t corresponde al ángulo entre el semieje $+x$ y el vector $\overrightarrow{OP}$, como se ve en la Figura 2.1.4*a*).

El punto inicial de la curva es $A_1(4,0)$; a medida que el parámetro aumenta desde 0 hasta 2π, el punto $P\,(4\cos t, 4\,\mathrm{sen}\,t)$ da una vuelta a la circunferencia en *sentido antihorario*, esto es contrario al movimiento de las agujas de un reloj. El punto final es el que corresponde a $t = 2\pi$, luego el movimiento de este objeto finaliza en $B_1(4,0)$. La trayectoria, en este caso, es cerrada y es una vuelta a la circunferencia.

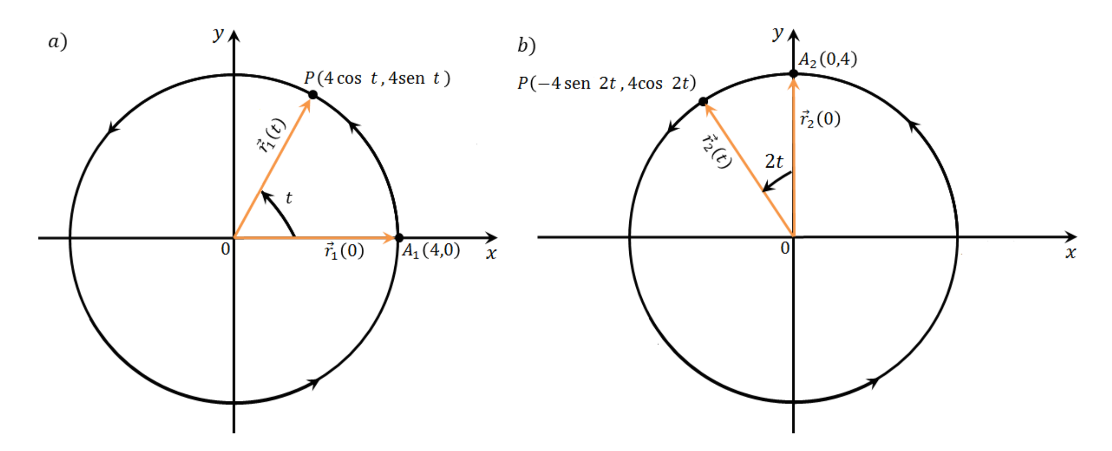


Figura 2.1.4: Curvas paramétricas definidas por: *a*) $\vec{r}_1(t)$, *b*) $\vec{r}_2(t)$, para t de 0 a 2π.

b) Si eliminamos el parámetro como hicimos en el inciso anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = [x_2(t)]^2 + [y_2(t)]^2 &= [-4\,\mathrm{sen}(2t)]^2 + [4\cos(2t)]^2 \\ &= 16\,\mathrm{sen}^2(2t) + 16\cos^2(2t) = 16 \end{aligned}$$

luego

$$x^2 + y^2 = 4^2.$$

O sea que la gráfica de la curva es también la circunferencia de radio 4 centrada en el origen. Notar que ahora el parámetro t corresponde a la mitad del ángulo entre el semieje $+y$ y el vector $\overrightarrow{OP}$, como se ve en la Figura 2.1.4*b*).

La curva parametrizada por $\vec{r}_2(t)$ comienza en $A_2(0,4)$ y termina en ese mismo punto después de haber girado el objeto dos veces sobre la circunferencia en sentido antihorario. La trayectoria, en este cado, es cerrada y corresponde a dos vueltas completas a la circunferencia.

■

■ **Ejemplo 2.1.3** Supongamos que se desea estudiar la curva de la Figura 2.1.4*a)* pero desde una perspectiva espacial (con el eje $+z$ saliendo hacia arriba de la hoja). Es fácil ver que una parametrización de la circunferencia de radio 4 centrada en el origen, horizontal y apoyada en el plano xy, y recorrida una vez completa en sentido antihorario visto desde $+z$, es

$$\vec{r}(t) = 4\cos(t)\breve{\imath} + 4\,\mathrm{sen}(t)\breve{\jmath} + 0\breve{k}, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Imagine ahora que la circunferencia está en ubicación vertical, apoyada en el plano yz; proponga una función vectorial que la describa.
Ahora imagine que se traslada la circunferencia original, manteniéndola siempre horizontal, hasta que su centro está en $(0, 0, 3)$, ¿qué función vectorial daría? ¿Y si el centro se traslada al $(1, 2, 3)$?
Por otro lado, notamos que las funciones componentes de $\vec{r}_1(t)$ del Ejemplo 2.1.2 *a)* son tales que la suma de los cuadrados de $\frac{x_1(t)}{4}$ e $\frac{y_1(t)}{4}$ resulta ser igual a $\cos^2 t + \mathrm{sen}^2\, t$ que tiene el valor constante 1 para cualquier t, luego aquella combinación permite "deshacerse del parámetro". Esto sugiere que para parametrizar una *elipse* de semiejes, por ejemplo, 3 y 5 basta tomar

$$\vec{r}(t) = 3\cos t\,\breve{\imath} + 5\,\mathrm{sen}\, t\,\breve{\jmath}, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

ya que $\left(\frac{x(t)}{3}\right)^2 + \left(\frac{y(t)}{5}\right)^2 = 1$ para cualquier t.

■

C Los Ejemplos 2.1.2*a)* y 2.1.2*b)* presentan funciones vectoriales distintas, que tienen la misma gráfica. Es necesario distinguir entre una *curva*, que es un conjunto de puntos, y una *curva paramétrica* en la cual los puntos son obtenidos mediante una función vectorial, o sea siguiendo un camino, una dirección y un sentido determinados. En esos ejemplos, aunque las gráficas coinciden, las curvas paramétricas son diferentes. Si pensamos en la curva trazada por el movimiento de un objeto, su representación paramétrica nos dice en qué punto está el móvil en cada instante de tiempo, hacia dónde va, y con qué velocidad y aceleración se mueve; mientras que la gráfica de la curva sólo da información de los puntos por los que pasa el móvil.

Hemos visto en estos ejemplos, dada una función vectorial, cuál es la curva para métrica correspondiente. Trataremos ahora de, dada una curva, hallar una *parametrización* adecuada.

■ **Ejemplo 2.1.4** Parametrización de una recta.

Sea L la recta en el espacio que pasa por los puntos $P(3, 2, 1)$ y $Q(-1, -2, 3)$. Dar una función vectorial que la parametrice.

En el Capítulo 1 aprendimos a construir ecuaciones paramétricas para una recta. Podemos tomar a $P(3, 2, 1)$ como un punto perteneciente a L, y a $\overrightarrow{PQ} = (-4, -4, 2)$ como un vector director para L. Tenemos entonces:

$$\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 2 - 4t \\ z = 1 + 2t. \end{cases}$$

Luego

$$\vec{r}(t) = (3 - 4t)\breve{\imath} + (2 - 4t)\breve{\jmath} + 1 + 2t)\breve{k} \quad t \in \mathbb{R}$$

es una representación de L mediante una función vectorial.

■



En el siguiente recurso se puede ver, en forma animada, cómo varía la ubicación del punto $P(f(t), g(t), h(t))$ con t:

https://ggbm.at/cAd9tpU6

Grafique la curva paramétrica del Ejemplo 2.1.4 en GeoGebra. Elija 5 valores de t, e indique en el gráfico a qué puntos sobre la recta corresponden, según la parametrización dada. ¿En qué sentido es recorrida la recta, de acuerdo a esta parametrización?
Si se restringe el dominio de $\vec{r}(t)$ al intervalo finito $t \in [0, 1]$, ¿qué curva paramétrica queda representada en este caso?

■ **Ejemplo 2.1.5** Parametrización de un segmento.
Determinar una función vectorial para el segmento rectilíneo orientado que va desde el punto $P_0(1, 3, -2)$ hasta el punto $P_1(4, 0, 3)$. Ver Figura 2.1.5.

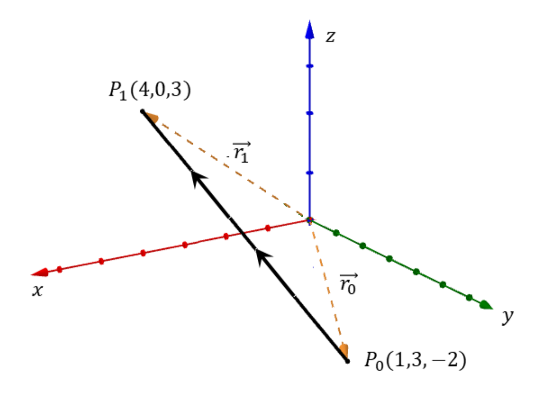


Figura 2.1.5: Segmento rectilíneo orientado que va desde P_0 hasta P_1.

Recordemos la deducción de las ecuaciones para una recta que pasa por dos puntos dados. Una ecuación vectorial para el segmento que une el punto final del vector $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ con el punto final del vector $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$ está dada por:

$$\vec{r}(t) = (1 - t)\,\vec{r}_0 + t\,\vec{r}_1, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Efectivamente, con esta parametrización se satisface que

$$\vec{r}(t = 0) = \vec{r}_0 \qquad \text{y} \qquad \vec{r}(t = 1) = \vec{r}_1,$$

y para valores de t crecientes entre 0 y 1 se obtienen los puntos del segmento de P_0 a P_1.
Notar que la parametrización dada puede reescribir de la siguiente forma:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_0), \qquad 0 \leq t \leq 1,$$

donde reconocemos el punto de referencia P_0 por donde pasa la recta y el vector director $\overrightarrow{P_0P_1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$.
Para este ejemplo, tenemos $\vec{r}_0 = (1, 3, -2)$ y $\vec{r}_1 = (4, 0, 3)$. Luego una función vectorial para el segmento orientado que va desde P_0 hasta P_1 es

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= (1 - t)\,(1, 3, -2) + t\,(4, 0, 3)\\ &= (1, 3, -2) + t\,[(4, 0, 3) - (1, 3, -2)]\\ &= (1 + 3t, 3 - 3t, -2 + 5t), \qquad 0 \leq t \leq 1.\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 2.1.6** Hélice circular.

Trazar la curva paramétrica determinada por la función vectorial

$$\vec{r}(t) = 2\cos t\ \breve{\imath} + 2\,\mathrm{sen}\,t\ \breve{\jmath} + 3t\ \breve{k}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Las funciones componentes de $\vec{r}(t)$ son $f(t) = 2\cos t$, $g(t) = 2\,\mathrm{sen}\,t$, $h(t) = 3t$, y están definidas para todos los valores reales de t. La curva descripta por $\vec{r}(t)$ es una *hélice* que se desarrolla en la superficie del cilindro circular recto de eje z y radio 2: $x^2 + y^2 = 4$. En efecto, la curva está sobre dicho cilindro ya que las componentes $f(t)$ y $g(t)$ satisfacen la ecuación de la superficie cilíndrica: $x^2 + y^2 = [f(t)]^2 + [g(t)]^2 = 4\cos^2 t + 4\,\mathrm{sen}^2\,t = 4$. Además, la curva "sube" sobre el cilindro a medida que la componente $h(t) = 3t$ aumenta (ver Figura 2.1.6).

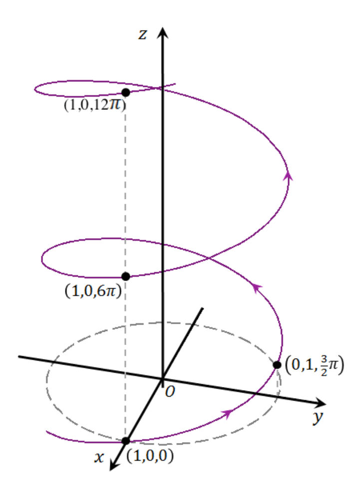


Figura 2.1.6: Hélice circular de eje z, radio 2 y paso 6π.

En este ejemplo, la periodicidad de las funciones componentes en x e y es de 2π; entonces, cada vez que t aumenta su valor en 2π, la curva completa una vuelta alrededor del cilindro. Pero no vuelve al mismo punto: la distancia (en este caso vertical) entre dos puntos de una hélice que corresponden a una vuelta (en este caso por un cambio de 2π en el parámetro), se llama paso de la hélice. Aquí el paso es $3\ 2\pi = 6\pi \simeq 18,85$.

¿Cómo se podría parametrizar una hélice que se desarrolla en la superficie de un cilindro recto de eje z, cuya sección transversal es una elipse (digamos, de semiejes 3 y 5)? Suponga que el paso es el mismo que en el ejemplo resuelto.

■

■ **Ejemplo 2.1.7** Parametrización de la curva determinada por la intersección entre dos superficies.

Considerar la curva determinada por la intersección entre la superficie cilíndrica dada por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ (cilindro circular de eje z y radio 1) y la superficie plana dada por $y + z = 2$ (ver Figura 2.1.7). Encontrar una función vectorial que describa la curva intersección, e indicar el sentido asignado por la parametrización propuesta.

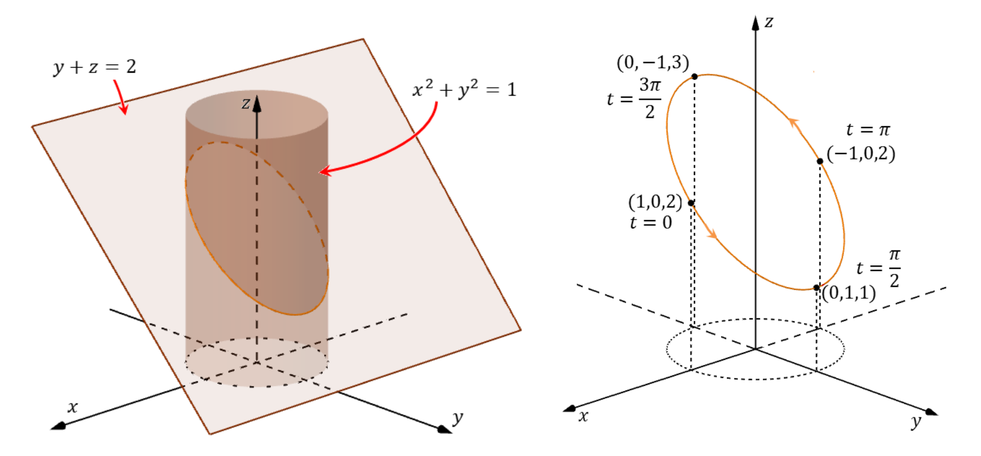


Figura 2.1.7: Elipse como intersección entre un cilindro circular y un plano oblicuo.

A partir de la figura, observamos que la curva intersección entre el cilindro y el plano es una curva cerrada y tiene la forma de una elipse sobre el plano dado. Un punto cualquiera $P(x, y, z)$ que está en la curva pertenece a ambas superficies a la vez, luego debe verificar simultáneamente ambas ecuaciones:

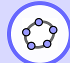
$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = & 1 \\ y + z & = & 2. \end{cases}$$

Buscamos expresar x, y, z en términos de un parámetro t de forma de verificar ambas ecuaciones. Vemos que si tomamos $x(t) = \cos t$, $y(t) = \operatorname{sen} t$ se satisface la ecuación del cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Usando ahora la ecuación del plano tenemos que $z = 2 - y$, luego $z(t) = 2 - y(t)$. Así, una parametrización de la curva intersección es:

$$\vec{r}(t) = \cos t\, \breve{\imath} + \operatorname{sen} t\, \breve{\jmath} + (2 - \operatorname{sen} t)\, \breve{k}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

¿Por qué razón hemos restringido el intervalo paramétrico al $[0, 2\pi]$?

Finalmente, el sentido en el cual se recorre la curva paramétrica a medida que aumenta el parámetro t, de acuerdo a la parametrización dada, es sentido antihorario visto desde el semieje z positivo. ■



Estudie el Ejemplo 2.1.7 mediante el siguiente recurso:
https://ggbm.at/C2cd6T4S

Parametrización trivial de una curva en el plano que es la gráfica de una función

Dada una función escalar de una variable (como las de Análisis Matemático I) $F : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la gráfica de F es, como ya sabemos, el conjunto de puntos $\{(x, y) : x \in I,\ y = F(x)\}$, que ubicados en el plano xy producen una curva. Podemos usar la variable x como parámetro ("trivial"), es decir que para $t \in \mathbb{R}$ definimos $x(t) = t$, luego $y(t) = F(t)$. Y tenemos $\vec{r}(t) = (t, F(t))$ como una función vectorial que parametriza (trivialmente) la curva que es gráfica de la función F. Notar que esa función vectorial le asigna a la curva el sentido de recorrido de izquierda a derecha, pues es en el sentido creciente del parámetro.

Dado que el parámetro es x (la abscisa de los puntos que forman la curva), es común escribir:

$$\vec{r}(x) = (x, F(x)), \quad x \in I.$$

Discuta la siguiente afirmación y dé un ejemplo: Tomando como parámetro $t = -x$ (esto es, definiendo que $x(t) = -t$), se obtiene una parametrización de la misma gráfica pero recorrida *en sentido inverso* (de derecha a izquierda); se debe tener en cuenta que si $x \in I = [a, b]$, entonces $t = -x \in [-b, -a]$.

Otra caso trivial es cuando los puntos de una curva satisfacen una ecuación de la forma $x = G(y)$ para y en cierto intervalo $J \subset \mathbb{R}$, luego podemos parametrizarla trivialmente tomando a y como el parámetro:

$$\vec{r}(y) = (G(y), y), \quad y \in J.$$

¿Cuál es el sentido de recorrido asignado por esta parametrización?

■ **Ejemplo 2.1.8** Dar una función vectorial que parametrice la gráfica de: *a*) $F(x) = 1 + x^2,\ x \in \mathbb{R}$ *b*) $G(y) = \cos^2 y,\ y \in \mathbb{R}$. Dibujar.

a) Para describir la curva $y = 1 + x^2$, gráfica de F, podemos usar la variable x como parámetro:

$$x(t) = t, \text{luego} \qquad y(t) = 1 + t^2.$$

Así la función vectorial $\vec{r}(t) = t\,\breve{\imath} + (1 + t^2)\,\breve{\jmath}$ con $t \in \mathbb{R}$, genera la curva correspondiente a la gráfica de la función $F(x) = 1 + x^2$, recorrida en el sentido de x creciente (de izquierda a derecha).

b) Para describir la curva $x = \cos^2 y$, gráfica de G, podemos usar la variable y como parámetro:

$$y(t) = t, \text{luego} \qquad x(t) = \cos^2 t.$$

Así la función vectorial $\vec{r}(t) = \cos^2 t\,\breve{\imath} + t\,\breve{\jmath}$ con $t \in \mathbb{R}$, genera la curva correspondiente a la gráfica de la función $G(y) = \cos^2 y$, recorrida en sentido de y creciente (de abajo a arriba).

■

Problemas de cruces y de encuentros

Cuando se estudia el movimiento de objetos, según vimos es posible describir sus trayectorias por medio de funciones vectoriales en función del tiempo. Es de interés conocer si, dadas las trayectorias de dos móviles, éstos se encontrarán (en cierto instante) o si sus caminos se cruzan (para instantes diferentes).

■ **Ejemplo 2.1.9** Graficar y parametrizar las siguientes curvas, y determinar si se cortan. En caso afirmativo, indicar los valores de los parámetros y los puntos de cruce y/o de encuentro.

a) La parábola $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{8}}$ y la circunferencia de radio 4 centrada en el origen.

b) La parábola $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{8}}$ y la hipérbola $xy = 8$.

a) La parábola puede parametrizarse trivialmente mediante $\vec{r}_p(x) = \left(x, \dfrac{x^2}{\sqrt{8}}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, mientras que para la circunferencia podemos usar $\vec{r}_c(t) = (4\cos t, 4\,\text{sen}\, t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Gráficamente se puede ver que ambas curvas se cortan en dos puntos, ubicados en el primer y segundo cuadrantes. Para hallarlos de manera analítica buscamos dónde coinciden las coordenadas de los puntos de ambas curvas, planteando la igualdad: $\vec{r}_p(x) = \vec{r}_c(t)$, para algún x y algún t (dentro de los dominios paramétricos respectivos). Esto implica hallar, si existen, valores de los parámetros x y t tales que

$$\begin{cases} x = 4\cos t \\ \dfrac{x^2}{\sqrt{8}} = 4\,\text{sen}\, t. \end{cases}$$

Elevando ambas ecuaciones al cuadrado y sumándolas, se obtiene $x^2 + \dfrac{x^4}{8} = 16$

que puede llevarse a la forma $(x^2+4)^2 = 144$, cuyas soluciones son $x = \pm\sqrt{8}$. Las soluciones para t dentro el intervalo paramétrico son, respectivamente, $t = \pi/4, 3\pi/4$. Podemos verificar que por un lado $\vec{r}_p(x = \sqrt{8}) = \vec{r}_c(t = \pi/4)$, y por el otro $\vec{r}_p(x = -\sqrt{8}) = \vec{r}_c(t = 3\pi/4)$. Hallamos entonces los dos puntos donde la parábola y la circunferencia *se cruzan*:

$$C_1(\sqrt{8}, \sqrt{8}) \qquad y \qquad C_2(-\sqrt{8}, \sqrt{8}).$$

b) Para la parábola usamos $\vec{r}_p(x) = \left(x, \frac{x^2}{\sqrt{8}}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, mientras que para la hipérbola proponemos la parametrización trivial de la curva $x = \frac{8}{y}$, o sea $\vec{r}_h(u) = \left(\frac{8}{u}, u\right)$, $u \in \mathbb{R} - \{0\}$. Gráficamente puede verse que ambas curvas se cortan en un punto del primer cuadrante. Analíticamente, planteamos la igualdad entre las funciones vectoriales: $\vec{r}_p(x) = \vec{r}_h(u)$, para algún x y algún u. Esto implica hallar, si existen, valores de los parámetros x y u tales que

$$\begin{cases} x &= \frac{8}{u} \\ \frac{x^2}{\sqrt{8}} &= u \end{cases}$$

que tiene como única solución $x = \sqrt{8}$ y, correspondientemente, $u = \sqrt{8}$. Podemos verificar que $\vec{r}_p(x = \sqrt{8}) = \vec{r}_h(u = \sqrt{8})$. Hallamos entonces el punto donde la parábola y la hipérbola se cortan:

$$E(\sqrt{8}, \sqrt{8}).$$

En este caso, observamos que en E el valor del parámetro x es el mismo valor que toma u, aproximadamente 2.83. Decimos que se trata de un *problema de encuentro*: si un par de objetos se mueven a lo largo de la parábola y la hipérbola, y si el parámetro representa el tiempo, ambos objetos se encuentran (y chocan) en el punto E, en el instante $x = u = \sqrt{8} \simeq 2.83$ segundos.

Notamos, por el contrario, que en el caso *a*) no hay encuentro, sino simplemente las trayectorias se cruzan. Si tanto x como t representan el tiempo, ¿cuál de los objetos llega antes al punto C_1: el que va por la parábola o el que va por la circunferencia?

■

2.1.2 Ejercicios

1. Coloque un lápiz (o lapicera) y una pulsera (o anillo) sobre su mesada. ¿Podría dar funciones vectoriales que los representen en el sistema de coordenadas del aula? Analice intervalo paramétrico y sentido, inducido por la parametrización propuesta.
2. En grupo, consigan un reloj (de pulsera o de pared) con agujas. El conjunto de puntos determinado por la punta de una aguja da origen a una circunferencia (imaginaria). ¿Cómo la describiría usando la noción de función vectorial? Discutan cuál sería un parámetro adecuado y su dominio (pensando que el reloj anda durante las 3 horas de clase); cuál es el vector imagen; el sentido de recorrido de la circunferencia; si la curva tiene puntos inicial y final, si es cerrada o no, si da una o varias vueltas. Escriban una función vectorial para cada aguja, si el parámetro es el tiempo medido en minutos.
3. Revea la Sección 1.5.1, y describa cada recta por medio de una función vectorial.
4. Trace y describa con sus palabras las siguientes curvas paramétricas en el plano xy, indicando el sentido del recorrido (a, b, x_C, y_C son constantes, a y b son positivas). En cada caso, escriba la función vectorial y también la ecuación cartesiana correspondiente.

   a) $\begin{cases} x(t) &= a \operatorname{sen} t \\ y(t) &= a \cos t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 4\pi$

b) $\begin{cases} x(t) = x_C + a\cos t \\ y(t) = y_C + a\,\text{sen}\, t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$

c) $\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\,\text{sen}\, t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$

d) $\begin{cases} x(t) = x_C + a\cos t \\ y(t) = y_C + b\,\text{sen}\, t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$

5. *a*) Halle una función vectorial que describa el segmento en el plano xy que va de $P(2,5)$ a $Q(6,1)$.

   b) Obtenga una parametrización para la recta que pasa por el punto $A(1,0,0)$ y apunta en el sentido del punto $B(3,6,-2)$.
6. Mencione cinco puntos que pertenezcan a la curva definida por la función vectorial: $\vec{r}(t) = (1+t)\,\breve{\imath} + 3t\,\breve{\jmath} - t\,\breve{k}$, con $-1 \le t \le 2$, e indique el valor correspondiente del parámetro.
7. *a*) Trace la curva del plano xy dada por la siguiente función vectorial e indique el sentido del recorrido: $\vec{r}(t) = 5\cos t\,\breve{\imath} + 2\,\text{sen}\, t\,\breve{\jmath}$, con $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

   b) Sea $\vec{r}(T) = 5\cos(3T)\,\breve{\imath} + 2\,\text{sen}(3T)\,\breve{\jmath}$, con $0 \le T \le 2\pi$. Esta función vectorial, ¿describe la misma curva que en *a*)? De no ser así, indique un intervalo de T para el cual se obtenga la misma curva.
8. Dadas las siguientes funciones vectoriales, grafique las curvas que representan:
   a) $\vec{r}(t) = t\,\breve{\imath} + \text{sen}\, t\,\breve{\jmath}$, con $0 \le t \le 2\pi$
   b) $\vec{r}(t) = t\,\breve{\imath} + \cos(2t)\,\breve{\jmath} + \text{sen}(2t)\,\breve{k}$, con $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
9. Teniendo en cuenta el Ejemplo 2.1.6 de la hélice circular, analice qué hélices quedan descriptas por las siguientes funciones vectoriales con $t \in \mathbb{R}$:
   a) $\vec{r}_1(t) = \text{sen}\, t\,\breve{\imath} + \cos t\,\breve{\jmath} + 3t\,\breve{k}$

   b) $\vec{r}_2(t) = 4\cos t\,\breve{\imath} + 5\,\text{sen}\, t\,\breve{\jmath} + 3t\,\breve{k}$

   c) $\vec{r}_3(t) = 3t\,\breve{\imath} + \cos t\,\breve{\jmath} + \text{sen}\, t\,\breve{k}$

   d) $\vec{r}_4(t) = 2\cos t\,\breve{\imath} + 2\,\text{sen}\, t\,\breve{\jmath} - 5t\,\breve{k}$

   e) $\vec{r}_5(t) = (1+\cos t)\,\breve{\imath} + \text{sen}\, t\,\breve{\jmath} + 3t\,\breve{k}$
10. Analice las diferencias que hay entre las curvas descriptas por las tres maneras siguientes:
    a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$

    b) $\vec{r}(t) = \cos t\,\breve{\imath} + \text{sen}\, t\,\breve{\jmath} + (3 - \cos t)\,\breve{k}$, con $0 \le t \le \pi$

    c) $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \text{sen}\, t \\ z(t) = 3 - \cos t \end{cases} \quad 0 \le t \le 3\pi$
11. Considere el movimiento de dos objetos en el espacio, tales que al tiempo t un de los objetos está en $P_1(-1+t, 4-t, -1+2t)$ y el otro en $P_2(-7+2t, -6+2t, -1+t)$. Discuta:
    a) ¿Se cruzan las trayectorias de estos objetos? Si es así, indique en qué punto lo hacen.
    b) ¿Chocan los objetos? Si es así, indique dónde (en qué punto del espacio) y cuándo (para qué valor de t) lo hacen.
12. Considere una situación como la del Ejercicio 11 con la diferencia que el vector posición en función del tiempo está dado por $\vec{r}_1(t) = t^2\,\breve{\imath} + 3t\,\breve{\jmath} + (-3t + 2t^2)\,\breve{k}$ para una partícula y por $\vec{r}_2(t) = (-1+2t)\,\breve{\imath} + (1+2t)\,\breve{\jmath} + (t^3 - 2)\,\breve{k}$ para otra. ¿Chocan? Si es así, indique dónde y cuándo.
13. Muestre que la función vectorial $\vec{r}(t) = (\text{sen}\, t, \cos t, \text{sen}^2 t)$, con $t \in [0, 2\pi]$, representa la curva dada por la intersección entre la superficie del cilindro parabólico $z = x^2$ y la superficie del cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$. Realice un esbozo de la curva que representa esa

función vectorial, indicando el sentido de recorrido. ¿A qué se parece? Observando que la segunda componente al cuadrado más la tercera componente suman 1, exprese la curva como intersección de otro par de superficies.

14. La curva con ecuaciones paramétricas $x(t) = t\cos t,\ y(t) = t\,\mathrm{sen}\,t,\ z(t) = t$, para $0 \leq t \leq 4\pi$, ¿se encuentra en la superficie de un cono? Si es así, realice un bosquejo de la curva.
15. ¿En qué puntos del espacio la curva definida por $\vec{r}(t) = t\,\breve{\imath} + (2t - t^2)\,\breve{k}$ corta al paraboloide $z = x^2 + y^2$? Esboce las gráficas de la curva y del paraboloide, y señale los puntos de intersección.
16. En cada uno de los siguientes casos, halle una función vectorial que describa la curva determinada por la intersección entre las superficies dadas; señale el sentido de recorrido asignado por su parametrización; grafique.
    a) El plano $z = 1 + y$, y la superficie del semicono $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$.
    b) El cilindro parabólico $y = x^2$, y la mitad superior del elipsoide $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$.
    c) El cilindro circular recto $x^2 + y^2 = 4$, y el paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$.

2.2 Derivación e integración de funciones vectoriales

Para funciones vectoriales son válidas todas las operaciones definidas para vectores: suma, multiplicación por un escalar, producto escalar y producto vectorial.

Veremos ahora de qué manera las ideas y conceptos desarrollados en Análisis Matemático I, como límite, continuidad, derivada e integral de una función con valores reales, pueden extenderse a una clase más amplia de funciones: las funciones con valores vectoriales.

2.2.1 Límite y continuidad

El *límite de una función vectorial* se define mediante los límites de sus funciones componentes, suponiendo que éstos existan.

Definición Si $\vec{r}(t) = f(t)\,\breve{\imath} + g(t)\,\breve{\jmath} + h(t)\,\breve{k}$, el *límite* de la función vectorial $\vec{r}(t)$ cuando t tiende a t_0 es

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t\to t_0} f(t)\right)\breve{\imath} + \left(\lim_{t\to t_0} g(t)\right)\breve{\jmath} + \left(\lim_{t\to t_0} h(t)\right)\breve{k}$$

siempre que existan los límites de las funciones componentes.

Los límites de funciones vectoriales siguen las mismas reglas que los límites de funciones escalares de una variable real.

■ **Ejemplo 2.2.1** Si $\vec{r}(t) = \cos t\,\breve{\imath} + \mathrm{sen}\,t\,\breve{\jmath} + t\,\breve{k}$, con $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{t\to\pi/4} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t\to\pi/4} \cos t\right)\breve{\imath} + \left(\lim_{t\to\pi/4} \mathrm{sen}\,t\right)\breve{\jmath} + \left(\lim_{t\to\pi/4} t\right)\breve{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\breve{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\breve{\jmath} + \frac{\pi}{4}\,\breve{k}.$$

■

La *continuidad de una función vectorial* se define de manera similar a la continuidad de una función escalar.

Definición Una función vectorial $\vec{r}(t)$ es *continua* en $t = t_0$ si:

1. existe $\vec{r}(t_0)$,
2. existe $\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t)$,
3. se verifica que $\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

Proposición 2.2.1.1 Se prueba fácilmente que $\vec{r}(t)$ es continua en t_0 si y sólo si todas sus funciones componentes son continuas en t_0.

■ **Ejemplo 2.2.2** En el Ejemplo 2.2.1, dado que existe $\vec{r}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\breve{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\breve{\jmath} + \frac{\pi}{4}\breve{k}$ y coincide con $\lim_{t\to\pi/4} \vec{r}(t)$, la función vectorial resulta continua en $t = \dfrac{\pi}{4}$; además, sabiendo que las funciones trigonométricas seno y coseno, así como las funciones polinomiales, son continuas para todo valor real, podemos asegurar que la función $\vec{r}(t) = \cos t\ \breve{\imath} + \operatorname{sen} t\ \breve{\jmath} + t\ \breve{k}$ es continua en $\mathbb{R}$. ■

Una función vectorial continua define una curva paramétrica continua (esta propiedad nos permitió en el Ejemplo 2.1.1 y otros, "unir los puntos para producir una curva continua").

2.2.2 Derivación

La *derivada de una función vectorial* se define de manera análoga a la derivada de una función escalar, mediante un ociciente incremental.

Definición La *derivada* $\vec{r}\,'$ de la función vectorial $\vec{r}(t)$ respecto del parámetro en $t = t_0$ está dada por

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = \vec{r}\,'(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{r}(t_0+\Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$

si este límite existe. Si existe $\vec{r}\,'(t_0)$, se dice que la función vectorial $\vec{r}(t)$ es *derivable en* t_0.

Proposición 2.2.2.1 Si las funciones componentes de $\vec{r}(t) = f(t)\,\breve{\imath} + g(t)\,\breve{\jmath} + h(t)\,\breve{k}$ son derivables para todo $t_0 \in (a,b)$, entonces $\vec{r}(t)$ es derivable en ese intervalo paramétrico, y se satisface que:

$$\vec{r}\,'(t) = f'(t)\,\breve{\imath} + g'(t)\,\breve{\jmath} + h'(t)\,\breve{k}, \qquad t \in (a,b).$$

■ **Ejemplo 2.2.3** a) La función del Ejemplo 2.2.1 es derivable en todo su dominio. La derivada en $t_0 = \frac{\pi}{4}$ es $\vec{r}\,'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\breve{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\breve{\jmath} + 1\breve{k}$, y en cualquier $t \in \mathbb{R}$ es $\vec{r}\,'(t) = -\cos t\breve{\imath} + \operatorname{sen} t\breve{k} + 1\breve{k}$.
b) La función vectorial $\vec{R}(t) = t\breve{\imath} + |t|\breve{\jmath}$, $t \in \mathbb{R}$ *no* es derivable en $t = 0$; justifique y grafique. ■

Proposición 2.2.2.2 — Reglas de derivación. Dado que derivada de una función vectorial puede calcularse derivando sus funciones componentes, las reglas de derivación son similares a las de funciones de valores reales. Supongamos que $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ son funciones vectoriales derivables, y a es un escalar, entonces:

- $[\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)]' = \vec{r}_1'(t) + \vec{r}_2'(t)$
- $[a\,\vec{r}_1(t)]' = a\,\vec{r}_1'(t)$
- $[\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t)]' = \vec{r}_1'(t)\cdot\vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2'(t)$
- $[\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t)]' = \vec{r}_1'(t)\times\vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2'(t)$

Funciones compuestas y regla de la cadena

Sea $\vec{r}(u)$ una función vectorial y sea $u(t)$ una función de valores reales, ambas derivables. Luego se puede evaluar la composición de estas funciones: $\vec{r}\,(u(t)) = \vec{R}(t)$ que depende de t. La derivada

de la función vectorial compuesta (respecto de su variable, t) es

$$\frac{d}{dt}\vec{R}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}\,(u(t)) = \frac{d}{du}\vec{r}(u)\ \frac{d}{dt}u(t)$$

o sea:

- $[\vec{r}(u(t))]' = \vec{r}'(u)\ u'(t)$ (Regla de la cadena).

La composición de una función vectorial con una función escalar es útil para *reparametrizar* una curva, esto es, describirla en términos de otro parámetro (que tenga, por ejemplo, cierto dominio o comportamiento deseado, inclusive para invertir el sentido de la curva).

■ **Ejemplo 2.2.4** En el Ejemplo 2.1.2*b*), compruebe $\vec{r}_2(t)$ puede pensarse como la composición de la función vectorial $\vec{r}(u) = (-4\,\text{sen}\,u, 4\cos u)$, $u \in [0, 4\pi]$, con la función escalar $u(t) = 2t$, $t \in [0, 2\pi]$. La derivada de la función vectorial compuesta resulta $\vec{r}_2(t)' = [\vec{r}(u(t))]' = (-4\cos u, -4\,\text{sen}\,u)\ 2 = (-8\cos(2t), -8\,\text{sen}(2t))$, donde al final dimos la expresión en términos de la variable de la función compuesta, t.

■

Vector tangente

En la Figura 2.2.1 se ilustra el significado geométrico de la definición dada para la derivada de una función vectorial. Consideremos una función vectorial $\vec{r}(t)$ cuya representación gráfica es la curva paramétrica de la figura. Los vectores $\vec{r}(t_0)$ y $\vec{r}(t_0+\Delta t)$ corresponden a los vectores de posición de los puntos P_0 y P, respectivamente, de la curva. Luego, el vector diferencia $\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$ es igual al vector $\overrightarrow{P_0P}$ que va de P_0 a P. Ver Figura 2.2.1*a*). Para $\Delta t > 0$ (es el caso mostrado en las figuras), $\overrightarrow{P_0P}/\Delta t$ apunta en el mismo sentido que $\overrightarrow{P_0P}$; para $\Delta t < 0$, $\overrightarrow{P_0P}$ apunta "hacia atrás", contra el sentido del movimiento (ya que entonces P estaría antes que P_0), sin embargo el cociente $\overrightarrow{P_0P}/\Delta t$ apuntará de nuevo "hacia adelante", es decir en el sentido de la curva paramétrica.

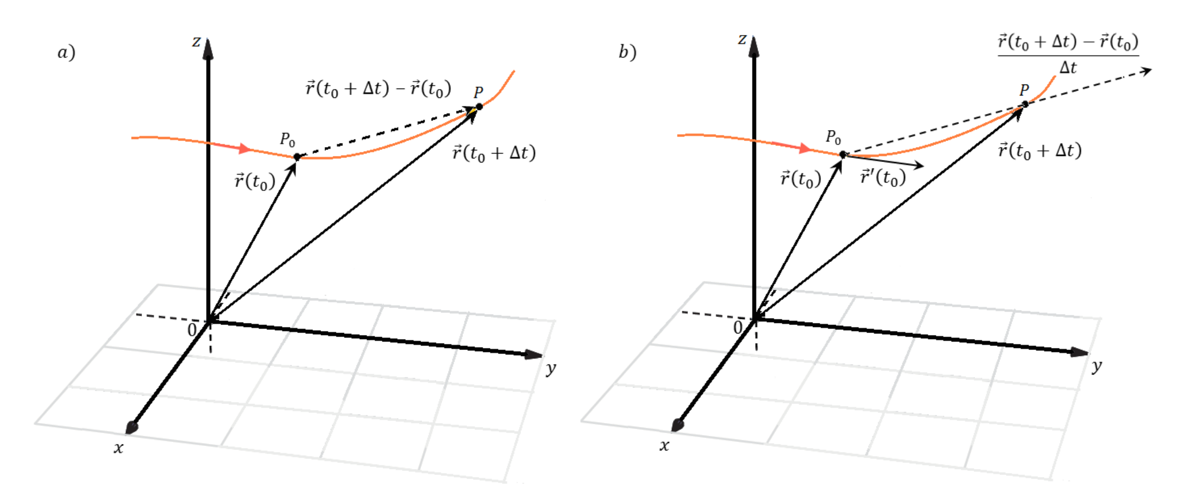


Figura 2.2.1: Derivada de una función vectorial.

Para explorar el comportamiento de $\vec{r}(t_0+\Delta t)$, $\vec{r}(t_0)$ y $\vec{r}\,'(t_0)$ es muy útil el siguiente recurso: https://ggbm.at/dMjwVta2

Dibuje lo que ocurre si se toma un Δt más pequeño, y observe cómo va cambiando la dirección entre el punto P_0 y cada nuevo punto P, hasta llegar a ser tangencial. Efectivamente, cuando $\Delta t \to 0$, el vector $[\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)]\,/\Delta t$ tiende a un vector que es tangente a la curva en P_0. Si $\vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$ entonces se lo define como un *vector tangente* a la curva en P_0. La *recta tangente* a la curva en P_0 está definida como la recta que pasa por P_0 y tiene como vector director a $\vec{r}\,'(t_0)$.

Para visualiar esta característica, se dibuja el vector $\vec{r}'(t_0)$ con su punto inicial en P_0.

Definición Sea P_0 un punto perteneciente a la curva C dada por $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$; por lo tanto P_0 es el punto final de $\vec{r}(t_0)$, para algún $t_0 \in I$. Entonces, si $\vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$, se tiene que $\vec{r}\,'(t_0)$ es un *vector tangente* a la curva C en P_0.

Definición Sea P_0 un punto perteneciente a la curva C dada por $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$; por lo tanto P_0 es el punto final de $\vec{r}(t_0)$, para algún $t_0 \in I$. La *recta tangente* a la curva en el punto P_0, es la recta paralela a $\vec{r}\,'(t_0)$ que pasa por P_0.

Notemos que para indicar la orientación de la recta tangente, se puede dar cualquier vector proporcional a $\vec{r}\,'(t_0)$. En particular, es útil muchas veces emplear el vector tangente unitario, que se obtiene por normalización:

$$\check{T}(t_0) = \frac{\vec{r}\,'(t_0)}{|\vec{r}\,'(t_0)|}$$

si $\vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$. Notar que tanto $\vec{r}\,'$ como $\check{T}$ apuntan en el mismo sentido que la curva paramétrica.

■ **Ejemplo 2.2.5** Dada la función vectorial $\vec{r}(t) = (2-t)\,\check{\imath} + \sqrt{t}\,\check{\jmath}$, con $t \geq 0$, determinar $\vec{r}\,'(t)$ e indicar su dominio. Hallar vector posición y vector tangente para $t_0 = 4$; graficar la curva paramétrica indicando dichos vectores.

Derivando la función vectorial $\vec{r}(t)$ por componentes (usando las reglas de derivación para funciones escalares aprendidas en Análisis Matemático I), se obtiene

$$\vec{r}\,'(t) = -\,\check{\imath} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\check{\jmath}, \qquad t > 0,$$

y observamos que $\vec{r}(t)$ no es derivable en $t = 0$. Para $t_0 = 4$ se tiene $\vec{r}(4) = -2\check{\imath} + 2\check{\jmath}$, y se puede calcular $\vec{r}\,'(4)$ "por definición" como $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{r}(4+\Delta t) - \vec{r}(4)}{\Delta t}$, o "por regla" evaluando $\vec{r}\,'(t)$ en $t = 4$ (¿podría hacer lo mismo para $t = 0$?, ¿por qué?); resulta $\vec{r}\,'(4) = -\,\check{\imath} + \frac{1}{4}\,\check{\jmath}$.

Para graficar la curva conviene obtener una expresión usando coordenadas cartesianas. Al eliminar el parámetro entre las ecuaciones $x = 2 - t$ e $y = \sqrt{t}$, se obtiene $x = 2 - y^2$, para $y \geq 0$ (observar que hemos tenido en cuenta que $y = +\sqrt{t}$; luego al despejar t como y^2, se debe recordar que y no era negativa). Se trata de "la mitad" de una parábola de eje x, con vértice en $V(2,0)$ y abierta hacia la izquierda; como curva paramétrica, tenemos que decir también el sentido: la rama de la parábola es recorrida de derecha a izquierda (o, también, de abajo hacia arriba), pues cuando el parámetro t aumenta, la abscisa del punto correspondiente de la curva disminuye mientras que la ordenada crece. La curva pasa, por ejemplo, por $P_0(-2,2)$ (cuando $t = 4$) y en dicho punto el vector $-\check{\imath} + \frac{1}{4}\check{\jmath}$ es tangente a la curva apuntando (efectivamente) a la izquierda y arriba. Muéstrelos en un gráfico. ■

■ **Ejemplo 2.2.6** Inversión del sentido deuna curva paramétrica. La ecuación $y^2 - x^2 = 1$ describe una hipérbola cuyas asíntotas son $y = \pm x$. El tramo que va desde $A(1, \sqrt{2})$ hasta $B(3, \sqrt{10})$ se puede parametrizar mediante $\vec{r}(t) = t\check{\imath} + \sqrt{1+t^2}\,\check{\jmath}$, con $t \in [1,3]$. Dar una parametrización del tramo de hipérbola pero recorridad desde B hasta A.

Para resolver este problema de invertir el sentido de recorrido proponemos la parametrización $\vec{r}$ pero cambiando t por $-t$; esto es, la función vectorial $-t\check{\imath} + \sqrt{1+t^2}\,\check{\jmath}$, con $t \in [-3,-1]$. Efectivamente, esta curva paramétrica empieza en $\left(-(-3), \sqrt{1+(-3)^2}\right) = (3, \sqrt{10})$ y finaliza en $\left(-(-1), \sqrt{1+(-1)^2}\right) = (1, \sqrt{2})$ y el sentido está dado por el vector tangente $-\check{\imath} + \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\check{\jmath}$. ■

■ **Ejemplo 2.2.7** Escribir una ecuación para la recta tangente a la hélice circular dada por $\vec{r}(t) = 4\cos t\ \breve{\imath} + 4\,\text{sen}\, t\ \breve{\jmath} + 3t\ \breve{k}$, con $t \in \mathbb{R}$ en el punto P_0 de la hélice que corresponde a $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Si conseguimos un punto por donde pasa la recta y un vector director, podemos escribir una ecuación de la recta. El punto puede ser P_0; buscamos entonces las coordenadas de P_0, calculando la función vectorial en $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$:

$$\vec{r}\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = 4\cos\tfrac{\pi}{4}\ \breve{\imath} + 4\,\text{sen}\,\tfrac{\pi}{4}\ \breve{\jmath} + 3\tfrac{\pi}{4}\ \breve{k} = 2\sqrt{2}\ \breve{\imath} + 2\sqrt{2}\ \breve{\jmath} + \tfrac{3}{4}\pi\ \breve{k}$$

de donde se obtiene el punto $P_0(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ \frac{3}{4}\pi)$.
Ahora bien, la dirección tangente a la hélice para un t genérico está dada por el vector

$$\vec{r}\,'(t) = -4\,\text{sen}\, t\ \breve{\imath} + 4\cos t\ \breve{\jmath} + 3\ \breve{k}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

¿Cuál es la dirección tangente a la hélice en el punto P_0? Es la dirección del vector

$$\vec{r}\,'\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = -4\,\text{sen}\,\tfrac{\pi}{4}\ \breve{\imath} + 4\cos\tfrac{\pi}{4}\ \breve{\jmath} + 3\ \breve{k} = -2\sqrt{2}\ \breve{\imath} + 2\sqrt{2}\ \breve{\jmath} + 3\ \breve{k}.$$

Ya tenemos el punto de tangencia P_0 y un vector tangente en ese punto, $\vec{r}\,'(t_0)$, que podemos usar como vector director; entonces

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,u \\ y = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,u \qquad u \in \mathbb{R} \\ z = \frac{3}{4}\pi + 3\,u \end{cases}$$

son ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la hélice en P_0 (donde denominamos u al parámetro en las ecuaciones de la recta, para diferenciarlo del parámetro t de la curva). ■

■ **Ejemplo 2.2.8** Determinar un vector tangente en cada punto de la curva que se obtiene como intersección entre el plano Π cuya ecuación es $z = x$ y la superficie S dada por la ecuación $y = 3x^3 - z^2$. Verificar que, en cada punto de la curva, dicho vector es perpendicular al vector normal al plano Π. ¿Por qué?

Llamemos C a la curva determinada por la intersección entre ambas superficies. Las ecuaciones cartesianas de $C = \Pi \cap S$ son

$$\begin{cases} z = x \\ y = 3x^3 - z^2. \end{cases}$$

Tomando a la variable x como parámetro, se tiene "trivialmente" que

$$\vec{r}(t) = \left(t,\ 3t^3 - t^2,\ t\right)$$

con t variando en $\mathbb{R}$, es una función vectorial que parametriza a la curva C. Un vector tangente a C en un punto cualquiera $P_0 \in C$, correspondiente a un dado valor t_0 del parámetro, es

$$\vec{r}\,'(t_0) = \left(1,\ 9t_0^2 - 2t_0,\ 1\right).$$

Un vector normal al plano $-x + z = 0$ es $\vec{n} = (-1,\ 0,\ 1)$. Haciendo el producto escalar $\vec{r}\,'(t_0) \cdot \vec{n} = \left(1,\ 9t_0^2 - 2t_0,\ 1\right) \cdot (-1,\ 0,\ 1) = 0$, vemos que $\vec{r}\,'(t_0)$ es perpendicular al vector normal al plano dado, para cualquier t_0, o sea para cualquier punto P_0 de la curva C. Para explicarlo, notemos que dado que C es intersección de Π y S, la curva pertenece tanto al plano Π como a la superficie S; en particular, $C \subset \Pi$ (lo que significa que la curva C es

plana, tal como ocurría en el Ejemplo 2.1.7. En consecuencia, un vector tangente a C "debe estar en el plano Π"; más estrictamente, $\vec{r}\,'(t_0)$ es paralelo al plano, luego es perpendicular a un vector normal al plano. ■

Curva suave (a trozos)

Un objeto que se mueve en el espacio va trazando una curva imaginaria. El objeto no puede desaparecer y volver a aparecer espontáneamente en otro punto del espacio; ni tampoco cambiar repentinamente la velocidad de su movimiento: un objeto, en general, se mueve siguiendo una curva (imaginaria) que es *suave*.

En general consideraremos funciones vectoriales $\vec{r}(t)$ con $t \in I$, de clase C^1, que son las funciones derivables con continuidad (o sea, funciones con derivada primera continua) en el intervalo I; pediremos además que se cumpla $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ para todo t en I. Estas funciones se llaman *funciones vectoriales suaves*.

Si una curva puede ser parametrizada por una función vectorial suave, se dice que es una *curva suave*. Una curva suave admite vector tangente en cada punto, que varía con continuidad a lo largo de la curva.

■ **Ejemplo 2.2.9** La hélice circular del Ejemplo 2.1.6 y la elipse del Ejemplo 2.1.7 son curvas suaves en todo su recorrido. Justificar. ■

Notemos que hay curvas que aunque estén definidas por funciones vectoriales $\vec{r}(t)$ de clase C^1, presentan sin embargo esquinas puntiagudas o cambios bruscos de dirección. La condición adicional $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ para todo $t \in I$, garantiza la existencia de recta tangente en cada punto de una curva suave (suave a trozos).

En algunas situaciones encontraremos curvas que se forman con la unión sucesiva de varias curvas suaves; la curva completa se llama precisamente *suave por tramos* o *suave a trozos*. Un ejemplo es la curva frontera de un triángulo, que está formada por tres tramos (los lados del triángulo) suaves; para definir la curva completa hará falta una función vectorial diferente para cada tramo. ¿Cómo podría parametrizar la frontera del triángulo con vértices en $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,1)$, recorridos en ese orden? (Observe que el sentido de recorrido de la curva es tal que la región triangular que encierra, queda siempre a la izquierda de la curva frontera; hablaremos un poco más adelante de la orientación de una curva cerrada con respecto a la región encerrada por ella).

Veamos el caso de una curva con picos; que resulta suave a trozos.

■ **Ejemplo 2.2.10** La Figura 2.2.2 muestra una curva conocida como hipocicloide de cuatro picos, definida por $\vec{r}(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$ para $0 \leq t \leq 2\pi$. ¿La función vectorial $\vec{r}(t)$ es de clase C^1? ¿Qué pasa en los cuatro picos del hipocicloide?

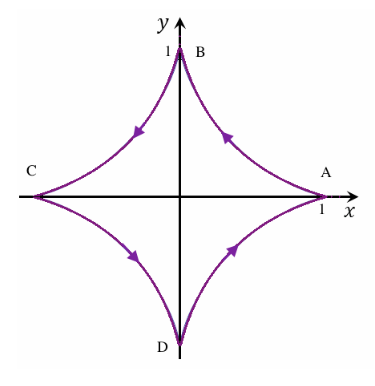


Figura 2.2.2: Hipocicloide de cuatro picos

Derivando la función vectorial, vemos que $\vec{r}\,'(t) = (-3\ \cos^2 t\ \operatorname{sen} t,\ 3\ \operatorname{sen}^2 t\ \cos t)$ es una función continua, por lo tanto $\vec{r}(t)$ es de clase C^1 en el intervalo de 0 a 2π. A partir del gráfico, notamos que los picos se encuentran en los puntos $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$ y $D(0,-1)$ de la curva, que corresponden a los valores $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$, y $\frac{3\pi}{2}$ del parámetro, respectivamente. Si calculamos $\vec{r}\,'(t)$ para el valor de t correspondiente a cada uno de los puntos-pico, tenemos: $\vec{r}\,'(0) = \vec{r}\,'(\frac{\pi}{2}) = \vec{r}\,'(\pi) = \vec{r}\,'(\frac{3\pi}{2}) = \vec{0}$. La curva cambia bruscamente de dirección en cada uno de los puntos-pico donde, como vemos, no hay recta tangente (ya que el vector nulo no tiene dirección definida); tampoco se puede obtener el vector tangente unitario en esos cuatro puntos. ■

Hay curvas como el contorno del número "8" o la letra "φ" (letra phi griega), tales que se cruzan a sí mismas en uno o más puntos. Veamos un ejemplo.

■ **Ejemplo 2.2.11** Considerar la curva C asociada a la función vectorial $\vec{r}(t) = t^2\,\breve{\imath} + (t^3 - 3t)\,\breve{\jmath}$, con $-2 \leq t \leq 2$. Mostrar que C tiene dos rectas tangentes en el punto $P(3,0)$ y encontrar sus ecuaciones.

Las funciones componentes son $x(t) = t^2,\ y(t) = t^3 - 3t$. Buscamos el o los valores de t que dan el punto $P(3,0)$; luego hay que resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} t^2 &= 3 \\ t^3 - 3t &= 0, \end{cases}$$

de donde surgen dos soluciones $t_1 = -\sqrt{3}$ y $t_2 = \sqrt{3}$ (notar que $t_3 = 0$ es solución de la segunda ecuación pero no de la primera). Esto indica que C se cruza a sí misma en $P(3,0)$, siendo $\vec{r}(-\sqrt{3}) = \vec{r}(\sqrt{3}) = 3\breve{\imath}$ En coordenadas cartesianas, la curva se expresa como $y = \pm\sqrt{x}\,(x^2 - 3)$, que puede pensarse como la unión de dos curvas, una correspondiente a la gráfica de la función $F(x) = -\sqrt{x}\,(x^2 - 3)$ y la otra a $G(x) = \sqrt{x}\,(x^2 - 3)$. Intente graficarlas usando Geogebra (tiene aproximadamente la forma de una letra α, siendo P el punto de cruce).

A partir de la parametrización dada, calculamos el vector $\vec{r}\,'(t) = (2t,\ 3t^2 - 3)$ y evaluamos en t_1 y t_2. Se obtienen dos vectores diferentes: $\vec{r}\,'(-\sqrt{3}) = (-2\sqrt{3},\ 6)$ y $\vec{r}\,'(\sqrt{3}) = (2\sqrt{3},\ 6)$, lo que indica que en $P(3,0)$ existen dos rectas tangentes, dependiendo del "instante" (si t fuera el tiempo).

Para el valor $t_1 = -\sqrt{3}$ del parámetro, las ecuaciones paramétricas de una de las rectas tangentes a C en $P(3,0)$ se pueden obtener como

$$\begin{cases} x = 3 - 2\sqrt{3}\,u \\ y = 0 + 6\,u \end{cases}, \quad u \in \mathbb{R},$$

cuya forma cartesiana es $y = -\sqrt{3}\,(x-3)$.

Procediendo de manera similar, para $t_2 = \sqrt{3}$ se obtiene la otra recta tangente a C en $P(3,0)$ mediante las ecuaciones

$$\begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{3}\,v \\ y = 0 + 6\,v \end{cases}, \quad v \in \mathbb{R},$$

que en cartesianas se expresa $y = \sqrt{3}\,(x-3)$.

Entonces, ambas rectas tangentes pasan por P pero tienen distinta pendiente. Visualice gráficamente. ■

2.2.3 Integración

La integral definida de una función vectorial continua $\vec{r}(t)$ en un intervalo $[a, b]$ del parámetro t, se define de forma similar a la integral de una función con valores reales, pero teniendo en cuenta que ahora el resultado es un vector. La integral de $\vec{r}(t)$ entre $t = a$ y $t = b$ se puede expresar en términos de las integrales de sus funciones componentes.

Definición La *integral definida* de una función vectorial $\vec{r}(t) = f(t)\,\breve{\imath} + g(t)\,\breve{\jmath} + h(t)\,\breve{k}$ entre $t = a$ y $t = b$ está dada por:

$$\int_a^b \vec{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)dt\right)\breve{\imath} + \left(\int_a^b g(t)dt\right)\breve{\jmath} + \left(\int_a^b h(t)dt\right)\breve{k}$$

si cada una de las integrales existe.

El Teorema Fundamental del Cálculo y la Regla de Barrow se generalizan para funciones vectoriales continuas, de la siguiente manera:

$$\int_a^b \vec{r}(t)\,dt = \vec{R}(t)\Big|_a^b = \vec{R}(b) - \vec{R}(a)$$

donde $\vec{R}$ es una primitiva de $\vec{r}$, o sea $\vec{R}\,'(t) = \vec{r}(t)$.

■ **Ejemplo 2.2.12** Si $\vec{r}(t) = 2\cos t\,\breve{\imath} + \operatorname{sen} t\,\breve{\jmath} + 2t\,\breve{k}$, evaluar $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \vec{r}(t)\,dt$.

Busquemos primero la familia de primitivas (o integral indefinida) de $\vec{r}(t)$:

$$\begin{aligned}\int \vec{r}(t)\,dt &= \left(\int 2\cos t\,dt\right)\breve{\imath} + \left(\int \operatorname{sen} t\,dt\right)\breve{\jmath} + \left(\int 2t\,dt\right)\breve{k}\\ &= (2\operatorname{sen} t + c_1)\,\breve{\imath} + (-\cos t + c_2)\,\breve{\jmath} + \left(t^2 + c_3\right)\breve{k}\\ &= 2\operatorname{sen} t\,\breve{\imath} - \cos t\,\breve{\jmath} + t^2\,\breve{k} + \vec{c} = \vec{R}(t)\end{aligned}$$

donde $\vec{c} = c_1\,\breve{\imath} + c_2\,\breve{\jmath} + c_3\,\breve{k}$ es una constante de integración vectorial. Aplicamos la regla de Barrow:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \vec{r}(t)\,dt &= \left(2\operatorname{sen} t\,\breve{\imath} - \cos t\,\breve{\jmath} + t^2\,\breve{k} + \vec{c}\right)\Big|_0^{\pi/2}\\ &= \left(2\,\breve{\imath} + \frac{\pi^2}{4}\,\breve{k} + \vec{c}\right) - (-\,\breve{\jmath} + \vec{c}) = 2\,\breve{\imath} + \breve{\jmath} + \frac{\pi^2}{4}\,\breve{k}\end{aligned}$$

(notar que el vector constante de integración se cancela).

La integral definida de $\vec{r}(t)$ de 0 a $\frac{\pi}{2}$ da como resultado el vector $\vec{v} = (2, 1, \frac{\pi^2}{4})$. ■

2.2.4 Ejercicios

1. Calcule la derivada de las siguientes funciones vectoriales:
   a) $\vec{r}(t) = \breve{\imath} + \breve{\jmath} + e^{4t}\,\breve{k}$
   b) $\vec{r}(t) = t\cos(3t)\,\breve{\imath} + \operatorname{sen}^3 t\,\breve{\jmath} + \cos^3 t\,\breve{k}$
2. En los siguientes casos grafique la curva plana generada por $\vec{r}(t)$, prestando atención al dominio natural de cada función vectorial. Halle $\vec{r}\,'(t)$. Además, para el valor dado de t_0, dibuje el vector $\vec{r}(t_0)$ en posición canónica y el vector tangente $\vec{r}\,'(t_0)$ donde termina $\vec{r}(t_0)$.
   a) $\vec{r}(t) = (1 + t)\,\breve{\imath} + \sqrt{t}\,\breve{\jmath}$, $\quad t_0 = 1$
   b) $\vec{r}(t) = e^t\,\breve{\imath} + e^{3t}\,\breve{\jmath}$, $\quad t_0 = 0$
3. Halle el vector tangente unitario $\breve{T}$ a la curva dada por $\vec{r}(t)$ en el punto correspondiente a t_0:

a) $\vec{r}(t) = 2\cos t\ \breve{\imath} + 2\,\text{sen}\,t\ \breve{\jmath} + \text{tg}\,t\ \breve{k}, \qquad t_0 = \dfrac{\pi}{4}$

b) $\vec{r}(t) = e^{2t}\ \breve{\imath} + e^{-2t}\ \breve{\jmath} + t\,e^{2t}\ \breve{k}, \qquad t_0 = \dfrac{1}{2}$

4. En cada caso, determine ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva dada C en el punto especificado P (asegúrese previamente de que el punto pertenezca a la curva):
   a) $C:\ \vec{r}(t) = (1 + 2\sqrt{t}, t^3 - t, t^3 + t), \qquad P(3, 0, 2)$
   b) $C:\ \vec{r}(t) = e^{-t}\cos t\ \breve{\imath} + e^{-t}\,\text{sen}\,t\ \breve{\jmath} + e^{-t}\ \breve{k}, \qquad P(1, 0, 1)$
5. Sea $C:\ \vec{r}(t) = \text{sen}(\pi t)\ \breve{\imath} + 2\,\text{sen}(\pi t)\ \breve{\jmath} + \cos(\pi t)\ \breve{k}, t \in \mathbb{R}$, una curva paramétrica. Para los puntos de la curva correspondientes a $t = 0$ y a $t = \dfrac{1}{2}$, determine las rectas tangentes a C y encuentre el punto de intersección entre dichas rectas (si existe). Grafique la curva y ambas rectas, mostrando dónde son tangentes a C y dónde se intersecan.
6. Se desea hallar la recta tangente a la curva dada por $\vec{r}(t) = \left(t^3 - 4t\right)\breve{\imath} + t^2\ \breve{\jmath}$ en el punto $P(0, 4)$. ¿Qué dificultad encuentra? Realice un bosquejo de la curva y explique qué ocurre en P.
7. Muestre que la curva definida por $\vec{r}(t) = (\cos t, \text{sen}\,t\ \cos t, 3)$ tiene dos rectas tangentes en el punto $(0, 0, 3)$.
8. ¿En qué punto (ó puntos) se intersecan las curvas $C_1:\ \vec{r}_1(t) = (t, 1 - t, 3 + t^2)$ y $C_2:\ \vec{r}_2(u) = (3 - u, u - 2, u^2)$? Halle el ángulo de intersección entre las curvas en el punto donde se cortan.
9. Evalúe las siguientes integrales:
   a) $\displaystyle\int \left(\frac{4}{1 + t^2}\ \breve{\jmath} + \frac{2t}{1 + t^2}\ \breve{k}\right) dt$
   b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(3\,\text{sen}^2 t \cos t\ \breve{\imath} + 3\,\text{sen}\,t \cos^2 t\ \breve{\jmath} + 2\,\text{sen}\,t \cos t\ \breve{k}\right) dt$
10. Encuentre $\vec{r}(t)$ si $\vec{r}\,'(t) = t\ \breve{\imath} + e^t\ \breve{\jmath} + te^t\ \breve{k}$, y se conoce $\vec{r}(0) = \breve{\imath} + \breve{\jmath} + \breve{k}$.

2.3 Longitud de una curva paramétrica

Consideremos una curva C suave en el plano, parametrizada por $\vec{r}(t) = (f(t), g(t))$ con $t \in [a, b]$, de clase C^1. Dividamos el intervalo paramétrico $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud Δt (entonces $\Delta t = \dfrac{b - a}{n}$, que será pequeño si tomamos n muy grande).
Sea $t_0 = a$ el parámetro que corresponde al punto inicial $P_0 = A$ de la curva, y $t_n = b$ el parámetro que corresponde al punto final $P_n = B$. Llamemos $t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i, \ldots, t_n$ (donde $t_i = t_{i-1} + \Delta t$, para cada i) a los valores de t al final de cada subintervalo en la recta paramétrica. Para cada i: $x_i = f(t_i)$ e $y_i = g(t_i)$ son las coordenadas de un punto $P_i(x_i, y_i)$ que está sobre la curva C. La poligonal con vértices $P_0, P_1, \ldots, P_{i-1}, P_i, \ldots, P_n$ aproxima a la curva C (ver Figura 2.3.1).

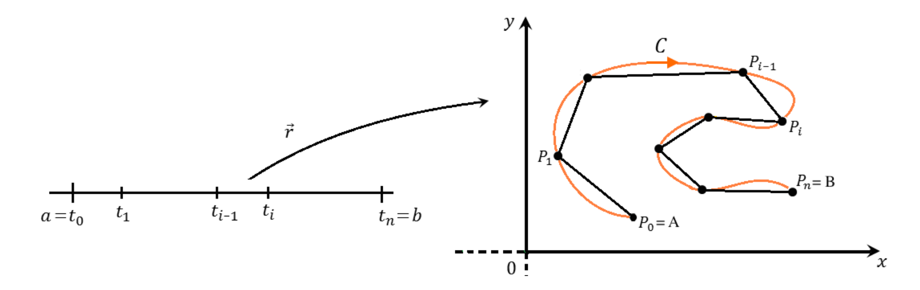


Figura 2.3.1: Aproximación poligonal de C.



Se puede usar el siguiente recurso para visualizar los segmentos de la poligonal para una curva en el espacio:
https://ggbm.at/TpEvgx73

Queremos medir la longitud de la curva, aproximándola con la longitud de la poligonal, que es la suma de las longitudes de los n segmentos. Considerando que cuando $n \longrightarrow \infty$, la poligonal se aproxima cada vez "mejor" a la curva, definimos la longitud total de la curva C como

$$L_C = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left|\overline{P_{i-1}P_i}\right|$$

donde $\left|\overline{P_{i-1}P_i}\right| = \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2}$ es la longitud del i-ésimo segmento, que une P_{i-1} con P_i.

El *Teorema del Valor Medio* establece: Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b); entonces existe (al menos) un $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

.

Apliquemos el teorema a las funciones $f(t)$ y $g(t)$ en cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$: siendo f y g continuas, existen valores c_i y d_i en el intervalo (t_{i-1}, t_i) tales que

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(c_i)\,\Delta t\,, \qquad g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(d_i)\,\Delta t$$

Entonces, la suma de las longitudes de los segmentos resulta

$$L_C = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f'(c_i)^2 + g'(d_i)^2}\ \Delta t$$

Esta expresión nos recuerda a una *suma de Riemann* para la función escalar

$$\sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2},$$

pero no es exactamente una suma de Riemann porque en general $c_i \neq d_i$. No obstante, teniendo en cuenta que f' y g' son funciones continuas, se puede probar que el límite existe y que es igual a la integral definida

$$L_C = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\ dt.$$

En el caso de una curva suave en el espacio, parametrizada por $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ de clase C^1 con $t \in [a, b]$, el resultado anterior se generaliza a

$$L_C = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2 + h'(t)^2}\ dt.$$

El integrando es el módulo del vector tangente $\vec{r}\,'(t)$. Luego, la *longitud total de una curva C* parametrizada por $\vec{r}(t)$, con $t \in [a, b]$, está dada por

$$L_C = \int_a^b |\vec{r}\,'(t)|\, dt.$$

Esta expresión es válida también para curvas suaves por tramos.

C Además, si bien aquí se plantea el cálculo usando una función vectorial particular para describir la curva, se puede probar que la longitud de una curva suave (a trozos) es independiente de la parametrización usada. Notamos que el sentido de recorrido de la curva no afeecta al valor de L_C.

■ **Ejemplo 2.3.1** *a*) Calcular la longitud de la circunferencia del Ejemplo 2.1.2*a*). *b*) Idem para la curva del Ejemplo 2.1.2*b*).

a) Vemos que $|\vec{r}_1'(t)| = |-4\,\text{sen}\,t\,\breve{\imath} + 4\cos t\,\breve{\jmath}| = \sqrt{16\,\text{sen}^2 t + 16\cos^2 t} = 4$. La longitud de la curva es

$$L_1 = \int_0^{2\pi} |\vec{r}_1\,'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} 4\, dt = 8\pi.$$

b) Se tiene $|\vec{r}_2\,'(t)| = |-8\cos(2t)\,\breve{\imath} - 8\,\text{sen}(2t)\,\breve{\jmath}| = 8$. Entonces la longitud de esta curva es

$$L_2 = \int_0^{2\pi} |\vec{r}_2\,'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} 8\, dt = 16\pi.$$

Notar que $L_1 = 8\pi$ es la longitud de una vuelta de la circunferencia de radio 4. Mientras que L_2 es el doble, porque en este caso la circunferencia es recorrida dos veces por la parametrización dada en el Ejemplo 2.1.2*b*).

■

C Este ejemplo muestra casos particulares de un resultado general. Una circunferencia de radio R puede parametrizarse mediante $\vec{r}(t) = (R\cos t, R\,\text{sen}\, t)$, con $t \in [0, 2\pi]$, que da en cada punto vector tangente de módulo constante e igual a R. Luego $L_C = \int_0^{2\pi} R\, dt = 2\pi R$, que es un resultado ya conocido para la longitud de (una vuelta) de circunferencia.

Mencionamos algunos casos para los que es posible hallar una primitiva explícita de $|\vec{r}\,'|$ y aplicar la regla de Barrow, a fin de obtener la longitud de una curva.

■ **Ejemplo 2.3.2** En el Ejemplo 2.1.1*a*), la longitud de la curva es infinita; mientras que en el Ejemplo 2.1.1*b*), la expresión para hallar la longitud de la porción de la parábola $x + 1 = (y-2)^2$ entre $A(0,1)$ y $B(8,5)$, usando la parametrización dada, es $L_C = \int_0^4 \sqrt{1 + 4(t-1)^2}\, dt$ (que dejamos aquí planteada).

En el Ejemplo 2.1.5 (compruebe que) la longitud del segmento es igual a la distancia entre $P_0(1, 3, -2)$ y $P_1(4, 0, 3)$.

En el Ejemplo 2.2.10, siendo una curva suave a trozos con 4 secciones de igual longitud (por simetría), es conveniente calcular la longitud de un tramo y multiplicar por 4. Pruebe que se tiene $|\vec{r}\,'(t)| = 3\,\text{sen}(t)\cos(t)$, y que cada arco del hipocicloide mide $\frac{3}{2}$ (un poco más que $\sqrt{2}$, que es la distancia entre dos picos sucesivos); luego la longitud total de ese hipocicloide de cuatro picos es 6.

■

■ **Ejemplo 2.3.3** Calcular la longitud de una vuelta de la hélice circular del Ejemplo 2.1.6.

Vemos que $|\vec{r}\,'(t)| = |-\text{sen}\, t\,\breve{\imath} + \cos t\,\breve{\jmath} + 3\,\breve{k}| = \sqrt{\text{sen}^2 t + \cos^2 t + 9} = \sqrt{10}$. Para calcular la longitud de una vuelta podemos considerar t en el intervalo $[0, 2\pi]$, luego

$$L = \int_0^{2\pi} |\vec{r}\,'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{10}\, dt = 2\sqrt{10}\pi.$$

■

2.3.1 Función longitud de arco

Pensemos en una persona que se encuentra caminando por un sendero en una montaña. El movimiento del senderista puede ser representado por la curva $C : \vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ en función del tiempo, habiendo partido de la posición determinada por $\vec{r}(a)$ en el instante $t = a$. Cuando la persona llegue al final del recorrido (la posición $\vec{r}(b)$ en el instante $t = b$), habrá caminado

L_C metros (suponiendo que las distancias se miden en esta unidad). En un instante intermedio t, ¿cuántos metros habrá recorrido?

En el instante t la persona llegó al punto del sendero $P(f(t), g(t), h(t))$, habiendo comenzado su recorrido en $A(f(a), g(a), h(a))$. Es decir que caminó la porción del sendero comprendida entre los puntos A y P. Calculamos entonces la longitud de la porción de curva entre estos puntos. Teniendo en cuenta que la longitud total de la curva (desde A para $t = a$, hasta B para $t = b$) es $\int_a^b |\vec{r}\,'(t)|\, dt$, la longitud de la porción de curva entre los puntos que corresponden a los valores a y t del parámetro, estará dada por

$$s(t) = \int_a^t |\vec{r}\,'(u)|\, du$$

que depende del instante t (llamamos u a la variable muda de integración). Queda así definida una función, para t entre a y b, que da la medida de la longitud de la curva $C : \vec{r}(t)$, para cada t a partir del punto inicial. La función $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ se llama *función longitud de arco* o *función longitud de curva*.

Veamos algunas propiedades interesantes de la función longitud de arco $s(t)$:

1. $\text{Dom}(s) = [a, b]$ e $\text{Im}(s) = [0, L_C]$, siendo $s(a) = 0$ y $s(b) = L_C$.
2. $s(t)$ es una función continua y derivable para $t \in (a, b)$, siendo $s\,'(t) = |\vec{r}\,'(t)|$.
3. $s(t)$ es una función estrictamente creciente y por lo tanto admite inversa en $[a, b]$.
4. $t(s)$, función inversa de $s(t)$, tiene dominio $[0, L_C]$ e imagen $[a, b]$; es continua y derivable, siendo $t'(s) = \dfrac{1}{|\vec{r}\,'(t)|}$.

Las demostraciones de estas propiedades son sencillas:

1. Por definición, $s(t = a) = \int_a^a |\vec{r}\,'(u)|\, du = 0$ (la longitud de un punto es nula), mientras que $s(t = b) = \int_a^b |\vec{r}\,'(u)|\, du = L_C$ (la longitud de toda la curva es L_C). Se tiene
$$s : [a, b] \to [0, L_C]$$
2. Por el Teorema Fundamental del Cálculo [1], la derivada de $s(t)$ es igual al integrando evaluado en t. Destacamos esta relación, que usaremos más adelante:
$$\frac{d}{dt} s(t) = |\vec{r}\,'(t)|$$
3. Dado que $s'(t)$ es el módulo de un vector, no puede ser negativa; además, como la curva es suave, se tiene $|\vec{r}\,'(t)| \neq 0$ para todo $t \in (a, b)$. Entonces $s'(t) > 0$, de donde $s(t)$ resulta una función estrictamente creciente. Efectivamente, la longitud de curva crece siempre, desde 0 en $t = a$ hasta L_C en $t = b$.
4. Recordamos de Análisis Matemático I que si $f(x)$ es invertible, sabemos que existe f^{-1} y que la derivada de f^{-1} es la inversa (multiplicativa) de la derivada de f. Llamemos $t(s)$ a la función inversa de $s(t)$. Vemos que expresa el tiempo transcurrido en función del camino recorrido, que $t : [0, L_C] \to [a, b]$, y que su derivada está dada por
$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{|\vec{r}\,'(t(s))|}.$$

2.3.2 Ejercicios

1. Tomen un tubo de cartón y una cinta métrica. Enrollen la cinta alrededor del tubo en forma helicoidal, eligiendo un paso que sea: a) la mitad, b) igual, c) el doble del diámetro del tubo. En cada caso, midan la longitud de una vuelta de hélice y verifiquen la expresión analítica hallada en el Ejemplo 2.1.6.

[1] Teorema Fundamental del Cálculo: Sea $f(x)$ continua en $[a, b]$, y sea $F(t) = \int_a^t f(x)\, dx$. Entonces $\frac{d}{dt}F(t) = f(t)$.

2. ¿Cuál es la longitud de la curva plana dada por $\vec{r}(t) = e^t \cos t\, \breve{\imath} + e^t \operatorname{sen} t\, \breve{\jmath}$, con $0 \le t \le 1$?
3. Calcule la longitud del arco definido por la función vectorial $\vec{r}(t) = (e^t \cos t,\ e^t \operatorname{sen} t,\ e^t)$ desde $A(1, 0, 1)$ hasta $B(-e^{\pi},\ 0,\ e^{\pi})$.
4. Considere una vuelta de hélice circular de radio 2 y paso 2π. Dé alguna parametrización para la curva y calcule su longitud.
   Compare con los cálculos hechos por otros compañeros, que probablemente hayan usado otra parametrización (inclusive pueden haber ubicado la hélice con un eje diferente), y verifique que todos obtienen el mismo resultado para la longitud.
5. Una curva C está descripta por $\vec{r}(t) = 3\cosh(2t)\,\breve{\imath} + 3\operatorname{senh}(2t)\,\breve{\jmath} + 6t\,\breve{k}$, con $0 \le t \le 1$. Halle la función longitud de arco y verifique que cumple con las propiedades demostradas. Muestre, en particular, que la derivada de $s(t)$ coincide con $|\vec{r}\,'(t)|$.

2.4 Aplicación: Movimiento en el espacio

Veamos cómo se pueden usar las ideas discutidas en este capítulo, para estudiar el movimiento de un objeto que describe cierta trayectoria en el espacio (o en el plano).

Pensemos en un objeto que se mueve a lo largo de una curva (imaginaria) descripta por $\vec{r}(t) = f(t)\,\breve{\imath} + g(t)\,\breve{\jmath} + h(t)\,\breve{k}$, con $t \in [t_0, t_F]$. Aquí $\vec{r}$ indica la posición espacial del objeto y t indica el tiempo. Las componentes de $\vec{r}$ tienen unidades de longitud (como el metro), y t digamos que se mide en segundos. En el instante t el objeto se encuentra en el punto P de coordenadas $(f(t), g(t), h(t))$.

Las magnitudes vectoriales de interés físico son las siguientes:

- El *desplazamiento* entre el instante inicial y el instante t está dado por el vector $\overrightarrow{P_0P} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)$.
- La *velocidad* del objeto en el instante t, está dada por la función vectorial:

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t).$$

  Para representar gráficamente la velocidad, se ubica el vector $\vec{v}(t)$ con su punto inicial (no en posición canónica sino) en el punto $P\big(f(t), g(t), h(t)\big)$ donde se encuentra el objeto en ese instante. De esta forma, el vector velocidad en el instante t es un vector tangente a la curva en P, e indica el cambio instantáneo de posición.
- La *aceleración* del objeto en el instante t está dada por la función vectorial:

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t).$$

También las siguientes magnitudes escalares son relevantes para estudiar objetos en movimiento:

- La *rapidez* con que se mueve el objeto en el instante t es el módulo del vector velocidad:

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = |\vec{r}\,'(t)|\,.$$

  Esta función escalar se mide en unidades de metros/segundo.
- La *distancia* recorrida por el objeto a lo largo de la trayectoria durante el intervalo de tiempo $[t_0, t]$, puede ser evaluada mediante la integral:

$$d(t) = \int_{t_0}^{t} |\vec{v}(u)|\, du$$

  Es la longitud de la porción de curva que está entre el punto inicial $P_0(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ y el punto $P(f(t), g(t), h(t))$. La distancia total recorrida por el objeto será entonces

$$L = d(t_F) = \int_{t_0}^{t_F} |\vec{r}\,'(u)\, du|\,.$$

Supongamos ahora que para un móvil se conoce la aceleración en función del tiempo. Integrando esta función vectorial en un dado intervalo temporarl, se obtiene el *cambio de velocidad* del móvil en dicho intervalo:

$$\int_{t_0}^{t} \vec{a}(u)\,du = \vec{v}(t) - \vec{v}(t_0)$$

de acuerdo a la regla de Barrow, siendo $\vec{v}(t)$ una primitiva de $\vec{a}(t)$ pues, justamente, $\vec{v}\,'(t) = \vec{a}(t)$. De aquí se obtiene entonces la velocidad al instante t, conociendo la aceleración:

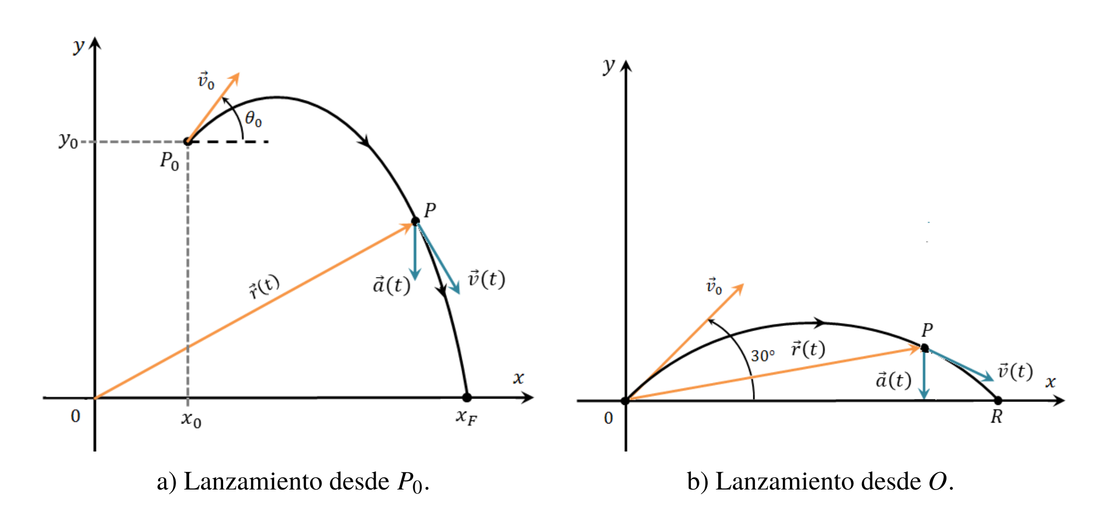
$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(u)\,du.$$

Notar que se necesita conocer el dato de la velocidad inicial.
De manera similar, integrando la velocidad en un dado intervalo temporal, y teniendo como dato la posición inicial, se obtiene *el cambio de posición* (o desplazamiento) del móvil en dicho intervalo. ¿Cómo se expresa entonces la posición al instante t, conociendo la velocidad?

■ **Ejemplo 2.4.1** En el problema de encuentro del Ejemplo 2.1.9*b*), las velocidades de los objetos moviéndose a lo largo de una parábola y una hipérbola son, respectivamente: $\vec{v}_p(t) = \breve{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}} t\,\breve{\jmath}$ y $\vec{r}_h(t) = -\frac{8}{t^2}\breve{\imath} + \breve{\jmath}$. ¿Con qué velocidades chocan? ¿Cuál de los móviles iba más rápido en ese instante?

■

■ **Ejemplo 2.4.2** Disparo de un proyectil ideal: tiro oblicuo.



a) Lanzamiento desde P_0. b) Lanzamiento desde O.

Figura 2.4.1: Tiro Oblicuo.

Se lanza un proyectil en el instante t_0 desde el punto $P_0(x_0, y_0)$ con una velocidad inicial $\vec{v}_0 = v_{0x}\breve{\imath} + v_{0y}\breve{\jmath}$ (en m/s). Ver Figura 2.4.1 a). La única fuerza que actúa sobre el proyectil durante su vuelo (despreciando la resistencia del aire) es el peso $-mg\,\breve{\jmath}$, donde m es la masa del proyectil y $g \approx 9.8$ m/s^2 es la aceleración de la gravedad. El movimiento del proyectil está dado por:

$$\begin{cases} x(t) &= x_0 + v_{0x}\,(t - t_0) \\ y(t) &= y_0 + v_{0y}\,(t - t_0) - \frac{1}{2} g\,(t - t_0)^2 \end{cases}$$

para todo $t \in [t_0, t_F]$, donde t_F es el instante final en el cual el proyectil choca contra el piso.

a) Escribir una función vectorial para representar la posición del proyectil. ¿Cuáles son los vectores posición inicial y final del movimiento? Dar las funciones vectoriales que describen la velocidad y la aceleración en función t, y mostrarlos en un gráfico.

b) Suponer que el proyectil es lanzado desde el origen en el instante $t_0 = 0$ s, con una rapidez inicial de 10 m/s formando un ángulo de 30º con la horizontal. Ver Figura 2.4.1 b). Escribir la función vectorial para la posición, y mostrar que la trayectoria es una parábola. ¿Cuál es el alcance R de este proyectil, y en qué momentos toca el suelo?

a) La función vectorial que describe la posición del proyectil en cada instante de su movimiento es:

$$\vec{r}(t) = [x_0 + v_{0x}(t - t_0)]\ \breve{\imath} + \left[y_0 + v_{0y}\,(t - t_0) - \frac{1}{2}g\,(t - t_0)^2\right]\ \breve{\jmath}, \qquad t \in [t_0, t_F].$$

En $t = t_0$ se tiene, por supuesto, $\vec{r}(t_0) = (x_0, y_0) = \overrightarrow{OP_0}$. En $t = t_F$ resulta $\vec{r}(t_F) = (x_F, 0) = \overrightarrow{OP_F}$.

Derivando $\vec{r}(t)$ se obtiene: $\vec{v}(t) = v_{0x}\breve{\imath} + (v_{0y} - gt)\breve{\jmath}$, $t \in [t_0, t_F]$, y derivando $\vec{v}(t)$ resulta: $\vec{a}(t) = -g\breve{\jmath}$, $t \in [t_0, t_F]$. En la gráfica dibujamos el vector $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$ apoyado en el punto P y tangente a la curva imaginaria parametrizada por $\vec{r}(t)$. Para el vector $\vec{a}(t)$ tenemos, en este ejemplo, que apunta hacia abajo en todo momento y tienen módulo constante.

b) Si el proyectil es lanzado en $t_0 = 0$ segundos desde O, entonces $x_0 = y_0 = 0$ m. Las componentes de la velocidad inicial son $v_{0x} = |\vec{v}_0| \cos\theta_0 = 5\sqrt{3}$ m/s, $v_{0y} = |\vec{v}_0| \operatorname{sen}\theta_0 = 5$ m/s. Se obtiene entonces para este caso:

$$\vec{r}(t) = 5\sqrt{3}\,t\,\breve{\imath} + (5\,t - 4.9\,t^2)\,\breve{\jmath}, \quad t \in [0, t_F],$$

lo que indica que al tiempo t el proyectil se encuentra en el punto de coordenadas:

$$\begin{cases} x &=& 5\sqrt{3}\,t \\ y &=& 5\,t - 4.9\,t^2 \end{cases}.$$

Para hallar la trayectoria en coordenadas cartesianas, se elimina el parámetro t entre estas ecuaciones, y se obtiene la curva $y = -\frac{4.9}{75}x^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x$, que es efectivamente una parábola de eje vertical, con ramas hacia abajo y vértice en (4.4, 1.3).

Para determinar t_F, planteamos que la altura del proyectil sea cero. La ecuación $5\,t - 4.9\,t^2 = 0$ tiene dos soluciones: $t = 0$ s (instante inicial, el objeto parte del piso) y $t = \frac{5}{4.9}$ s $\simeq 1.02$ s (instante final, el objeto choca con el piso). Resulta entonces que el alcance del proyectil es $R = x_F - x_0 = x\left(\frac{5}{4.9}\right) - 0 = \frac{25\sqrt{3}}{4.9}$ m $\simeq 8.8$ m.

■

Utilizar el siguiente recurso para determinar en forma animada la posición final del proyectil en un tiro oblicuo.
https://ggbm.at/v7FvgJrS

■ **Ejemplo 2.4.3** Vuelo de un planeador.

Un planeador vuela en espiral hacia arriba debido a una corriente de aire de rápido ascenso, de tal forma que su vector posición es $\vec{r}(t) = 3\cos t\ \breve{\imath} + 3\,\text{sen}\,t\ \breve{\jmath} + t^2\ \breve{k}$, $t \geq 0$. La trayectoria es similar a la de una hélice circular (aunque no es una hélice, ¿por qué?). Esbozar la gráfica para $0 \leq t \leq 4\pi$. Determinar:

a) La velocidad y la aceleración en el instante t,

b) La rapidez del planeador en el instante t,

c) El momento en el que la aceleración del planeador es ortogonal a su velocidad, si es que ello ocurre.

a) Derivando sucesivamente $\vec{r}(t)$ obtenemos la velocidad

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = -3\,\text{sen}\,t\ \breve{\imath} + 3\cos t\ \breve{\jmath} + 2t\ \breve{k}$$

y la aceleración

$$\vec{a}(t) = \vec{r}\,''(t) = -3\cos t\ \breve{\imath} - 3\,\text{sen}\,t\ \breve{\jmath} + 2\ \breve{k}$$

como funciones vectoriales de $t \geq 0$.

b) La rapidez, es el módulo del vector velocidad:

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{(-3\,\text{sen}\,t)^2 + (3\cos t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{9 + 4t^2}, \quad t \geq 0.$$

c) Para determinar en qué momento(s) $\vec{v}$ y $\vec{a}$ son ortogonales, buscamos valores de t para los cuales

$$0 = \vec{v} \cdot \vec{a} = 9\,\text{sen}\,t\cos t - 9\cos t\,\text{sen}\,t + 4t = 4t$$

Así, en este caso, el único instante en que el vector aceleración es perpendicular al vector velocidad es cuando $t = 0$, esto es, en el punto inicial $(3, 0, 0)$.

■

2.4.1 Ejercicios

1. Encuentre la velocidad, aceleración y rapidez de un objeto si la posición está dada por $\vec{r}(t) = t\ \breve{\imath} + t^2\ \breve{\jmath} + 2\ \breve{k}$. Trace la trayectoria del objeto y dibuje los vectores velocidad y aceleración para $t = 1$s y $t = 2$s.
2. Determine para $t \geq 0$ los vectores velocidad y posición de un objeto que tiene aceleración dada por $\vec{a}(t) = \breve{\imath} + 2\ \breve{\jmath}$, sabiendo que la velocidad y posición iniciales son $\vec{v}(0) = \breve{k}$ y $\vec{r}(0) = \vec{0}$, respectivamente.
3. Movimiento circular uniforme.
   La función vectorial $\vec{r}(t) = A\cos t\ \breve{\imath} + A\,\text{sen}\,t\ \breve{\jmath}$, con $t \in [0, 2\pi]$ en segundos, describe la posición de un objeto que realiza un recorrido circular alrededor del origen, a una distancia A del mismo. Considere $A = 4$ cm (recordar el Ejemplo 2.1.2).
   a) ¿Cuáles son los puntos inicial y final de la trayectoria? ¿En qué lugar se encuentra el objeto en los instantes $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, π y $\frac{3\pi}{2}$? ¿Cuál es el sentido del recorrido? Grafique.
   b) Calcule las funciones velocidad y aceleración. Evalúe dichas funciones en los instantes dados en *a*). Grafique los vectores obtenidos, ubicándolos en la posición del objeto en cada instante.
   c) Pruebe que en este caso $\vec{v}(t)$ es perpendicular al vector posición $\vec{r}(t)$, y que $\vec{a}(t)$ apunta hacia el centro de la circunferencia para todo t. Muestre que la rapidez es constante.
4. En su recorrido, un objeto genera una curva C representada por la función vectorial $\vec{r}(t) = \left(\sqrt{5}\ \text{sen}\,t,\ \sqrt{5}\ \cos t,\ 2\,t\right)$, donde $t \geq 0$ denota el tiempo en segundos.
   a) Suponiendo que el trayecto que realiza el objeto es medido en metros y comienza en el punto $(0, \sqrt{5}, 0)$, encuentre el punto Q al que llega el objeto si recorrió 3π metros.
   b) ¿Cuál es la velocidad del objeto en Q ?

2.5 Actividades integradoras y autoevaluación

2.5.1 Actividades integradoras

1. ¿Cómo se puede cambiar la orientación de una curva $C : \vec{r}(t)$ con $t \in [a, b]$?
2. La función vectorial $\vec{r}(t) = (t, 2t + 3)$, con $-\infty < t < \infty$, parametriza una recta en el plano.
   a) $\vec{r}_1(t) = (t^3, 2t^3 + 3)$ también parametriza una recta en el plano. ¿Qué diferencia hay?
   b) La función $\vec{r}_2(t) = (t^2, 2t^2 + 3)$, ¿qué curva representa?
3. Tiro vertical.
   Tome una pelotita de ping pong y arrójela hacia arriba. Escriba una función vectorial que represente la posición del móvil, indicando las funciones componentes y su dominio (recuerde el Ejemplo 8 sobre Tiro oblicuo, y adáptelo a esta situación). Obtenga luego las funciones vectoriales que correspondan a velocidad y aceleración.
4. Encuentre ecuaciones paramétricas para las siguientes rectas:
   a) La recta que pasa por los puntos $P(2, 3, -1)$ y $Q(5, 2, 0)$.
   b) La recta que apunta en la dirección del vector $\vec{u} = 3\,\breve{\imath} - 3\,\breve{\jmath} + \breve{k}$ y pasa por el punto $R(1, 2, 3)$.
   c) ¿Se intersecan las rectas dadas en los incisos *a*) y *b*)?
5. Escriba la familia de todos los "caminos" rectos en el plano que pasan por $O(0, 0)$. Idem utilizando parábolas de eje y y parábolas de eje x, con vértice en $O(0, 0)$.
6. *a*) Construya una hélice cónica utilizando, por ejemplo, un cucurucho como soporte y un trozo de alambre de aluminio; luego retire el soporte y estudie la "curva" fabricada.
   b) Aplaste la curva hasta hacerla plana, ¿qué curva obtiene como proyección de la hélice cónica?
7. Un tobogán con forma helicoidal de 1.5 m de radio, tiene 2 m de altura y da un giro completo desde arriba hasta abajo. Halle una función vectorial que modele la línea central del tobogán.
8. Si la aceleración de un móvil está dada por $\vec{a}(t) = \breve{\imath} + \breve{\jmath} + \breve{k}$ para $t \geq 0$ con $\vec{v}(0) = \vec{0}$ (el móvil parte del reposo) y $\vec{r}(0) = \breve{\imath} + \breve{\jmath}$, ¿cuáles son las funciones velocidad y posición del móvil? ¿Cuál es la posición en $t = 2$ s?
9. Halle el vector velocidad y la rapidez con que se mueve un objeto sobre una circunferencia de radio R (en cm) parametrizada por la función vectorial $\vec{r}(t) = R\cos(\omega t)\,\breve{\imath} + R\,\mathrm{sen}(\omega t)\,\breve{\jmath}$, donde ω es la velocidad angular (en rad/s) constante. Compruebe que el vector velocidad es ortogonal al vector posición, para cualquier instante. Halle el vector aceleración y verifique que apunta hacia el centro de la circunferencia. Calcule el módulo del vector aceleración. Grafique, indicando los vectores $\vec{r}(t), \vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$ para 4 valores de t elegidos (tome $R = 3$ cm y $\omega = 6\pi$ rad/s).
10. Sea C una curva en el espacio y $\vec{r}(t)$ una parametrización de la misma.
    a) Halle $\vec{r}(t)$ si $\vec{r}\,'(t) = -3\,\mathrm{sen}\,t\,\breve{\imath} + 3\cos t\,\breve{\jmath} + 4\,\breve{k}$ y $\vec{r}(0) = 3\,\breve{\imath} + \breve{\jmath} - \breve{k}$.
    b) Obtenga una ecuación para la recta tangente a C en el punto $P_0(3, 1, -1)$.
    c) Encuentre la función longitud de arco $s(t)$ medida desde el punto en el cual $t = 0$ y en la dirección creciente de t.
11. Halle una función vectorial que describa la frontera de la región del primer cuadrante limitada por las curvas $y = 4x$, $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, recorrida en sentido antihorario. Encuentre un vector tangente a la curva en $P(\frac{3}{4}, \frac{4}{3})$. ¿En qué puntos no se puede definir un vector tangente a la curva dada? Justifique.
12. Parametrice el borde C del semicírculo de radio 1 centrado en el origen, en el semiplano superior. Asigne sentido antihorario (o "sentido positivo") a la curva paramétrica, de tal forma que los puntos del semicírculo quedan a la izquierda de C.
13. Dada $C : \vec{r}(t) = \left(2t^{3/2},\ \cos(2t),\ \mathrm{sen}(2t)\right)$ con $t \in [-\frac{4}{9}, \frac{1}{3}]$, calcule la longitud de C.
14. Dada una curva con ecuación cartesiana $C_k :\ x^2 + y^2 = k$ (con k constante positiva, fija):
    a) dé una parametrización para la curva C_k;
    b) halle un vector <u>normal</u> a C_k en el punto $P(0, \sqrt{k})$;
    c) grafique para distintos k.

2.5.2 Autoevaluación

Se propone que resuelva los siguientes ejercicios (del estilo de los que podrían plantearse en un parcial de la materia), en forma individual y dedicando aproximadamente 30 minutos en total. Justifique cada uno de los pasos en sus demostraciones teóricas; los cálculos numéricos puede dejarlos expresados (no es necesario el uso de la calculadora, a menos que necesite comparar valores numéricos).

1. Dada la hélice $\vec{r}(t) = (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\,t, \sqrt{1-R^2}\;t)$, con $t \in [0, 2\pi]$, siendo R una constante fija, positiva:
   a) halle una ecuación de la recta tangente a la hélice, en el punto $(0, R, \frac{1}{2}\sqrt{1-R^2}\;\pi)$;
   b) calcule la longitud de una vuelta de esta hélice;
   c) halle la función longitud de arco $s(t)$.
2. Defina una función vectorial que represente a la curva del espacio determinada por la intersección de las superficies $(x-1)^2 + z^2 = 4$ y $z - y = 0$. Indique en un gráfico el sentido de recorrido asignado por la parametrización propuesta.
3. Considere el movimiento de un objeto descripto por la función vectorial

$$\vec{r}(t) = 3\cos\left(\frac{t}{2}\right)\breve{\imath} + 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\breve{\jmath}$$

   donde $t \geq 0$ indica el tiempo transcurrido, en segundos.
   a) ¿Qué tipo de movimiento describe este objeto? Grafique la curva paramétrica en el plano.
   b) Para $t = \frac{\pi}{2}$, calcule los vectores velocidad y aceleración. Indique en el gráfico el correspondiente vector de posición y dibuje en su extremo la velocidad y la aceleración calculadas.
   c) Calcule la rapidez con que se mueve el objeto. ¿Depende del punto donde se encuentra?